
Observation commutée de systèmes linéarisables par un changement d'échelle de temps singulier

William Pasillas-Lépine

Laboratoire des signaux et systèmes
CNRS / CentraleSupélec / Université Paris-Sud

Travail commun avec **Trong Bien Hoang** et **Witold Respondek**

Linéarisation et changements de coordonnées pour l'observation

- Krener, A. J., & Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1), 47-52.
- Krener, A. J., & Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2), 197-216.
- Moya, P., Ortega, R., Netto, M. S., Praly, L., & Picó, J. (2002). Application of nonlinear time-scaling for robust controller design of reaction systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(1), 57-69.
- Guay, M. (2002). Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10), 1730-1735.
- Respondek, W., Pogromsky, A., & Nijmeijer, H. (2004). Time scaling for observer design with linearizable error dynamics. *Automatica*, 40(2), 277-285.
- Hoang, T. B., Pasillas-Lépine, W., De Bernardinis, A., & Netto, M. (2014) Extended braking stiffness estimation based on a switched observer, with an application to wheel-acceleration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(6), 2384–2392.

La classe de systèmes

Nous nous intéressons à des systèmes

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x),$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ est la **mesure**, et f and g sont de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous cherchons ceux qui peuvent se mettre sous la forme

$$\dot{z} = s(y)(Az + d(y)) + b(y)u, \quad y = Cz, \quad (1)$$

où la paire (A, C) est **observable**.

On considère l'**observateur**

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = s(y)(A\hat{z} + d(y) + K(s(y))(y - C\hat{z})) + b(y)u,$$

où le **gain** $K(\cdot)$ dépend uniquement de la sortie du système.

Dynamique d'erreur dans le cas régulier

L'**erreur d'observation** $e = z - \hat{z}$ a une dynamique

$$\frac{de}{dt} = s(y)(A - K(s(y))C)e.$$

Lorsque $s > 0$ (**cas régulier**), en changeant l'**échelle de temps**

$$\tau(t) = \int_0^t s(y(\nu))d\nu,$$

on obtient^a

$$\frac{de}{d\tau} = (A - KC)e.$$

Lorsque s ne s'approche jamais de zéro, la **stabilité asymptotique** de l'origine est garantie lorsque $A - KC$ est **Hurwitz**.

^aRespondek, W., Pogromsky, A., & Nijmeijer, H. (2004). Time scaling for observer design with linearizable error dynamics. *Automatica*, 40(2), 277-285.

Les pièges du cas singulier

Nous supposons que $s(y) = 0$ si et seulement si $y = 0$, et que $s'(0) \neq 0$.

Dans le **cas singulier**, lorsque la fonction $s(y(t))$ change de signe, on a trois problèmes :

- Lorsque $s(y(t)) < 0$, l'échelle de temps est **inversée**...
L'erreur doit *diverger* en τ , pour *converger* en t .
- Les instants t_i auxquels $s(y(t_i)) = 0$ ne doivent pas *s'accumuler*...
Cela peut s'éviter en imposant une condition de **temps de maintien**^a.
- Le système n'est plus **uniformément observable**.
On doit exclure les commandes générant des états *indistinguables*.

^aHespanha, J. P. (2004). Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4), 470-482.

Premier ingrédient : L'échelle de temps

Nous considérons une **nouvelle échelle de temps**

$$\tau(t) = \int_0^t |s(y(\nu))| d\nu,$$

et choisissons des **gains d'observation** dépendant du signe de la sortie

$$K(s(y(\tau))) = \begin{cases} K^+ & \text{lorsque : } s(y(\tau)) > 0 \\ K^- & \text{lorsque : } s(y(\tau)) < 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\frac{de}{d\tau} = \begin{cases} (A - K^+C)e & \text{lorsque : } s(y(\tau)) > 0 \\ (-A + K^-C)e & \text{lorsque : } s(y(\tau)) < 0, \end{cases}$$

ceci génère un **système commuté**

$$\frac{de}{d\tau} = A_{\sigma(\tau)}e.$$

Stabilité exponentielle uniforme & temps de maintien

L'origine d'un système commuté est dit **uniformément exponentiellement stable** s'il existe des constantes $a_0 > 0$ et $\lambda_0 > 0$ telles que, pour tout $\tau \geq 0$, on a

$$\|e(\tau)\| \leq a_0 \exp(-\lambda_0 \tau) \|e(0)\|.$$

Le mot **uniforme** se réfère au fait que a_0 et λ_0 ne dépendent pas du signal de commutation^a.

Le signal de commutation de l'observateur $\sigma(\cdot)$ admet un **temps de maintien**^b lorsque $\exists \tau_D > 0$ telle que deux **discontinuités consécutives** de σ ne sont jamais séparées par un temps inférieur τ_D .

^aD. Angeli. A note on stability of arbitrarily switched homogeneous systems. *Nonlinear Control Abstracts*, 1(13), 1999.

^bHespanha, J. P. (2004). Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4), 470-482.

Théorème d'Hespanha (2004)

Supposons qu'il existe une famille compacte $\{P_p : p \in \mathcal{P}\}$ de matrices symétriques définies positives telles que, pour chaque $(x, \sigma) \in \mathcal{S}$,

$$x^T(t)P_{\sigma(t)}x(t) \leq x^T(t)P_{\sigma(t-)}x(t), \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$A_p^T P_p + P_p A_p \leq -C_p^T C_p, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

pour une famille appropriée de matrices $\{C_p : p \in \mathcal{P}\}$ telles que $C_p^T C_p$ soient symétriques positives. Alors, le système commuté $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, avec $\sigma \in \mathcal{S}$, est stable.

De plus, si chaque paire (C_p, A_p) est observable ($\forall p \in \mathcal{P}$) : (i) Lorsque $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\text{weak-dwell}}$ il est asymptotiquement stable ; (ii) Lorsqu'il existe $\tau_D > 0$ et $T < \infty$ tels que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\text{p-dwell}}[\tau_D, T]$ il est (uniformément) exponentiellement stable.

Deuxième ingrédient : Résolution des équations de Lyapunov

Théorème 1 *Considérons une paire (A, C) observable. Définissons $Q = C^T C$. Pour chaque paire de gains donnée K^+ et K^- , définissons*

$$A_+ = A - K^+ C \quad \text{et} \quad A_- = -A + K^- C. \quad (2)$$

Si K^+ est tel que A_+ est Hurwitz, alors il existe un unique K^- tel que

$$A_+^T P + P A_+ = -Q \quad \text{et} \quad A_-^T P + P A_- = -Q \quad (3)$$

admettent une solution commune symétrique et définie positive P .

Si la paire (A, C) est sous forme normale d'observabilité, alors les gains k_i^- de K^- s'expriment en fonction des gains k_i^+ de K^+ par

$$k_i^- = (-1)^i k_i^+ + (1 - (-1)^i) a_i,$$

où les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de A .

Forme normale d'observabilité

Nous rappelons que pour toute paire observable (A, C) , il existe un changement linéaire de coordonnées dans lesquelles

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces coordonnées, le système est sous *forme normale d'observabilité*.

Conditions d'observabilité

Pour garantir l'observabilité du système, nous supposons que la paire (A, C) est observable et que la fonction $Cb(y)$ ne s'annule pas en $y = 0$. Ces hypothèses sont une conséquence du résultat suivant.

Proposition 1 *Le système (6) est observable si et seulement si la paire (A, C) est observable et le système est de degré relatif 1 pour chaque z tel que $Cz = 0$. Le système (6) n'est jamais uniformément observable, car la commande $u(t) \equiv 0$ rend indistinguables toute paire d'états $z_0 \neq \tilde{z}_0$ tels que $Cz_0 = C\tilde{z}_0 = 0$.*

Si la paire (A, C) est observable et le système est de degré relatif 1 pour chaque z tel que $Cz = 0$, alors chaque commande $u(t)$, pour laquelle il existe ϵ_u tel que u est continu sur $[0, \epsilon_u[$ et $u(t) \neq 0$ pour chaque $t \in [0, \epsilon_u[$, distingue tous les états $z \in \mathbb{R}^n$.

Troisième ingrédient : Commandes admissibles

Fixons deux **ensembles compacts** Ω_0 et Ω , d'intérieur non vide et tels que $0 \in \Omega_0$ et $\Omega_0 \subset \Omega$. Fixons $\epsilon > 0$. Définissons le compact $\Sigma = \Omega \cap \{z \in \mathbb{R}^n : |Cz| \leq \epsilon\}$.

Définissons a_0 , d_0 et s_0 comme les **maximums** des fonctions $|CAz|$, $|Cd(y)|$ et $|s(y)|$, respectivement, sur Σ . Définissons b_0 comme le **minimum** de $Cb(y)$ sur Σ . Introduisons la constante $\alpha = s_0(a_0 + d_0)/b_0$ et fixons $\beta > \alpha$.

On dit qu'une loi de commande est **admissible** si elle génère un signal $u(\cdot)$ vérifiant, avec sa trajectoire associée $x(\cdot)$ les propriétés suivantes :

- (i) Le signal $u(t)$ est une fonction continue par morceaux vérifiant $|u(t)| < \beta$, pour tout $t \geq 0$;
- (ii) Sur un intervalle donné $[a, b]$ tel que $|y(t)| < \epsilon$, pour $t \in [a, b]$, le signe de $u(t)$ est constant et $|u(t)| > \alpha$.
- (iii) Si $z(0) \in \Omega_0$ alors $z(t) \in \Omega$, pour chaque $t \geq 0$.

Convergence de l'observateur

Théorème 2 *Considérons le système*

$$\dot{z} = s(y)(Az + d(y)) + b(y)u, \quad y = Cz,$$

*et supposons que la fonction $Cb(y)$ ne s'annule pas lorsque $y = 0$ et que le contrôleur utilisé pour commander le système est **admissible**. Si $z_0 \in \Omega_0$, alors les signaux de commutation $\rho(t)$ et $\sigma(\tau)$ générés par la commande dans chacune des échelles de temps admettent tous les deux un temps de maintien strictement positif.*

*Si, additionnellement, la paire (A, C) est **observable** et les gains matriciels K^+ et K^- satisfont les conditions du Théorème 1, alors l'origine de la dynamique d'erreur*

$$\frac{de}{d\tau} = \begin{cases} (A - K^+C)e & \text{lorsque } s(y(\tau)) > 0 \\ (-A + K^-C)e & \text{lorsque } s(y(\tau)) < 0 \end{cases}$$

*est **uniformément exponentiellement stable** dans la nouvelle échelle de temps et **asymptotiquement stable** dans le temps original.*

Dynamique d'une roue (Rappel)

La vitesse angulaire ω de la roue a une dynamique

$$I \frac{d\omega}{dt} = -R F_x - \gamma_b P_b,$$

où I est l'inertie de la roue, R son rayon, F_x l'effort longitudinal du pneu, P_b la pression de freinage et γ_b l'efficacité des plaquettes.

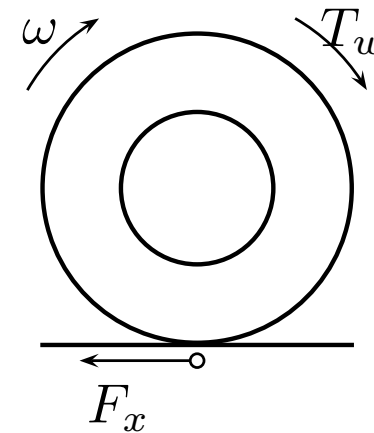
L'**effort pneumatique** F_x est une fonction non linéaire

$$F_x(\lambda) = \mu(\lambda) F_z$$

du **taux de glissement**

$$\lambda = \frac{R\omega - v_x}{v_x},$$

où F_z est la charge verticale, v_x la vitesse véhicule et $\mu(\lambda)$ la **caractéristique du pneu**.

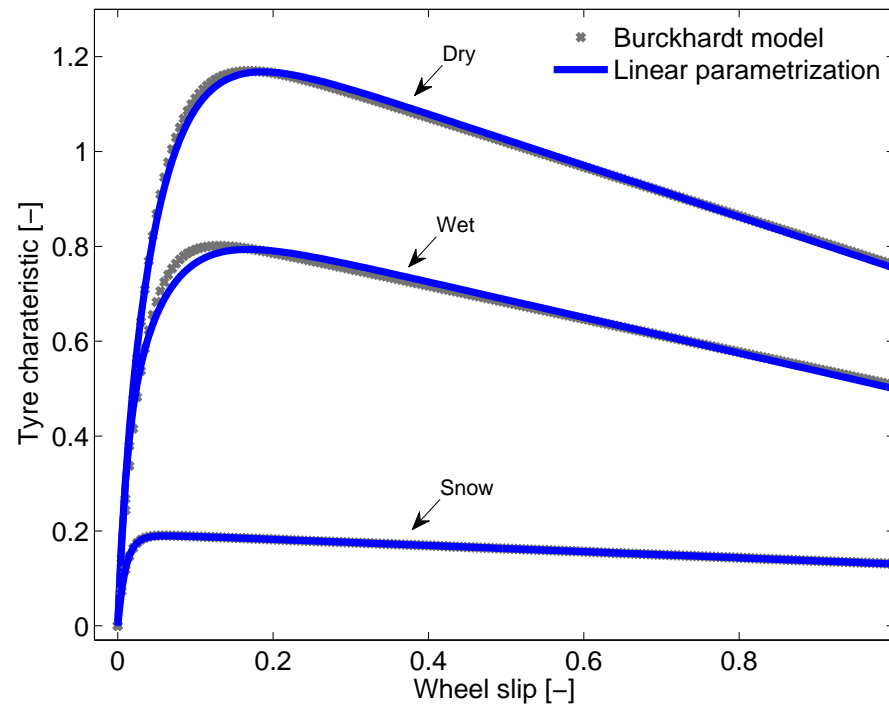


Modèle de pneu de Burckhardt (Rappel)

La caractéristique du pneu est définie^a par la fonction

$$\mu(\lambda) = c_1(1 - e^{-c_2\lambda}) - c_3\lambda,$$

où les constantes c_1 , c_2 , and c_3 dépendent du *type de sol*.



^aBurckhardt, M. (1993). *Fahrwerktechnik : Radschlupf-Regelsysteme*. Vogel-Verlag.

Dynamique de l'accélération angulaire et de l'XBS

On considère comme variables $z_1 = R\dot{\omega} - a_x$ et $z_2 = \mu'(\lambda)$, pour obtenir

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-a}{v_x(t)} z_1 z_2 + bu$$
$$\frac{dz_2}{dt} = (cz_2 + d) \frac{z_1}{v_x(t)} \quad \text{et} \quad y = z_1,$$

où a , b , c et d sont des **constantes** et u la dérivée de la **pression de freinage**.

La seule variable mesurable est $y = z_1$, l'écart d'**accélération angulaire**. La variable non mesurée z_2 est l'**XBS**.

La constante z_3 est **inconnue** et dépend des paramètres du modèle de Burckhardt.

Un observateur de l'XBS

On peut proposer l'**observateur**^a suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{z}_1}{dt} &= \frac{-a}{v_x} z_1 \hat{z}_2 + bu + \frac{k_1(z_1)}{v_x} z_1 (z_1 - \hat{z}_1) \\ \frac{d\hat{z}_2}{dt} &= (c\hat{z}_2 + d) \frac{z_1}{v_x} + \frac{k_2(z_1)}{v_x} z_1 (z_1 - \hat{z}_1).\end{aligned}$$

Les **gains de l'observateur** $k_i(z_1)$, pour $1 \leq i \leq 2$, vérifient

$$k_i(z_1) = \begin{cases} k_i^+ & \text{lorsque } z_1 > 0 \\ k_i^- & \text{lorsque } z_1 < 0. \end{cases}$$

^aHoang, T. B. *et al.* (2014). Extended braking stiffness estimation based on a switched observer. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.

Étude du cas bidimensionnel, obtenu quand $d = 0$

En définissant l'**erreur d'observation** par :

$$e_i = z_i - \hat{z}_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 2$$

Dans le cas particulier où $d = 0$, on obtient la **dynamique d'erreur** suivante

$$\frac{de}{dt} = \frac{z_1}{v_x} \begin{pmatrix} -k_1(z_1) & -a \\ -k_2(z_1) & c \end{pmatrix} e.$$

En prenant une nouvelle **échelle de temps** s , avec

$$s(t) = \int_0^t \frac{|z_1(\tau)|}{v_x(\tau)} d\tau,$$

on obtient $dt/ds \geq 0$, indépendamment des valeurs de z_1 .

Dynamique d'erreur dans la nouvelle échelle de temps

La dynamique d'erreur dans l'échelle de temps s vérifie :

$$\frac{de(s)}{ds} = \begin{cases} A_1 e(s) = \begin{pmatrix} -k_1^+ & -a \\ -k_2^+ & c \end{pmatrix} e(s) & \text{lorsque } z_1 > 0 \\ A_2 e(s) = \begin{pmatrix} k_1^- & a \\ k_2^- & -c \end{pmatrix} e(s) & \text{lorsque } z_1 < 0. \end{cases}$$

La convergence de l'observateur peut s'analyser en étudiant la stabilité asymptotique de l'origine de ce **système commuté**.

Classification des systèmes commutés dans le plan

On a un système commuté dans le plan

$$\frac{dx(s)}{ds} = A_\sigma x(s), \quad (4)$$

où $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$, avec $\mathcal{P} := \{1, 2\}$ désigne un signal sélectionnant, à chaque instant, une matrice dans $\{A_1, A_2\}$, avec les $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Balde, Boscain et Mason ont introduit un **invariant**

$$\Gamma(A, B) = \frac{1}{2} (\text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB)),$$

ainsi qu'un autre invariant R dont le calcul est plus compliqué (voir leur article^a).

^aBalde, M., Boscain, U., and Mason, P. (2009). A note on stability conditions for planar switched systems. *International Journal of Control*, 82(10), 1882-1888.

Théorème de Balde, Boscain et Mason (2009)

Pour le système (4), on a les quatre cas suivants :

(i) Si $\Gamma(A_1, A_2) < -\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ alors il existe une condition initiale et une loi de commutation générant une trajectoire non bornée.

(ii) Si $\Gamma(A_1, A_2) = -\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ alors le système est UGS mais n'est pas UGES.

(iii) Si $\Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ et $\text{tr}(A_1 A_2) > -2\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ alors le système admet une fonction de Lyapunov quadratique commune (il est donc UGES).

(iv) Si $\Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ et $\text{tr}(A_1 A_2) \leq -2\sqrt{\det A_1 \det A_2}$ alors le système est UGES si $R < 1$, UGS si $R = 1$ et admet une condition initiale et une loi de commutation générant une trajectoire non bornée lorsque $R > 1$.

Étude du cas général, tridimensionnel, obtenu quand $d \neq 0$

On considère comme variables $z_1 = R\dot{\omega} - a_x$ et $z_2 = \mu'(\lambda)$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \frac{-a}{v_x(t)} z_1 z_2 + bu \\ \frac{dz_2}{dt} &= (cz_2 + z_3) \frac{z_1}{v_x(t)} \quad \text{et} \quad y = z_1, \\ \frac{dz_3}{dt} &= 0\end{aligned}$$

où a , b , et c sont des **constantes** et u la dérivée de la **pression de freinage**.

La seule variable mesurable est $y = z_1$, l'écart d'**accélération angulaire**. La variable non mesurée z_2 est l'**XBS**.

La constante z_3 est **inconnue** et dépend des paramètres du modèle de Burckhardt.

Un observateur de l'XBS

On peut proposer l'**observateur**^a suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{z}_1}{dt} &= \frac{-a}{v_x} z_1 \hat{z}_2 + bu + \frac{k_1(z_1)}{v_x} z_1 (z_1 - \hat{z}_1) \\ \frac{d\hat{z}_2}{dt} &= (c\hat{z}_2 + \hat{z}_3) \frac{z_1}{v_x} + \frac{k_2(z_1)}{v_x} z_1 (z_1 - \hat{z}_1) \\ \frac{d\hat{z}_3}{dt} &= \frac{k_3(z_1)}{v_x} z_1 (z_1 - \hat{z}_1).\end{aligned}$$

Les **gains de l'observateur** $k_i(z_1)$, pour $1 \leq i \leq 3$, vérifient

$$k_i(z_1) = \begin{cases} k_i^+ & \text{lorsque } z_1 > 0 \\ k_i^- & \text{lorsque } z_1 < 0. \end{cases}$$

^aHoang, T. B. *et al.* (2014). Extended braking stiffness estimation based on a switched observer. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.

Changement de l'échelle de temps

En définissant l'**erreur d'observation** par :

$$e_i = z_i - \hat{z}_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3$$

On obtient la **dynamique d'erreur** suivante

$$\frac{de}{dt} = \frac{z_1}{v_x} \begin{pmatrix} -k_1(z_1) & -a & 0 \\ -k_2(z_1) & c & 1 \\ -k_3(z_1) & 0 & 0 \end{pmatrix} e.$$

En prenant une nouvelle **échelle de temps** s , avec

$$s(t) = \int_0^t \frac{|z_1(\tau)|}{v_x(\tau)} d\tau,$$

on obtient $dt/ds \geq 0$, indépendamment des valeurs de z_1 .

Dynamique d'erreur dans la nouvelle échelle de temps

La dynamique d'erreur dans l'échelle de temps s vérifie :

$$\frac{de(s)}{ds} = \begin{cases} A_1 e(s) = \begin{pmatrix} -k_1^+ & -a & 0 \\ -k_2^+ & c & 1 \\ -k_3^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} e(s) & \text{if } z_1 > 0 \\ A_2 e(s) = \begin{pmatrix} k_1^- & a & 0 \\ k_2^- & -c & -1 \\ k_3^- & 0 & 0 \end{pmatrix} e(s) & \text{if } z_1 < 0. \end{cases}$$

La convergence de l'observateur peut s'analyser en étudiant la stabilité asymptotique de l'origine de ce **système commuté**.

Convergence de l'observateur

Théorème 1 Supposons que le gain $K^+ = \begin{pmatrix} K_1^+ & K_2^+ & K_3^+ \end{pmatrix}$ vérifie

$$K_1^+ > c, K_2^+ < -\frac{c}{a}K_1^+ \text{ et } \frac{-(cK_1^+ + aK_2^+)(c - K_1^+)}{a} < K_3^+ < 0$$

et que le gain $K^- = \begin{pmatrix} K_1^- & K_2^- & K_3^- \end{pmatrix}$ vérifie

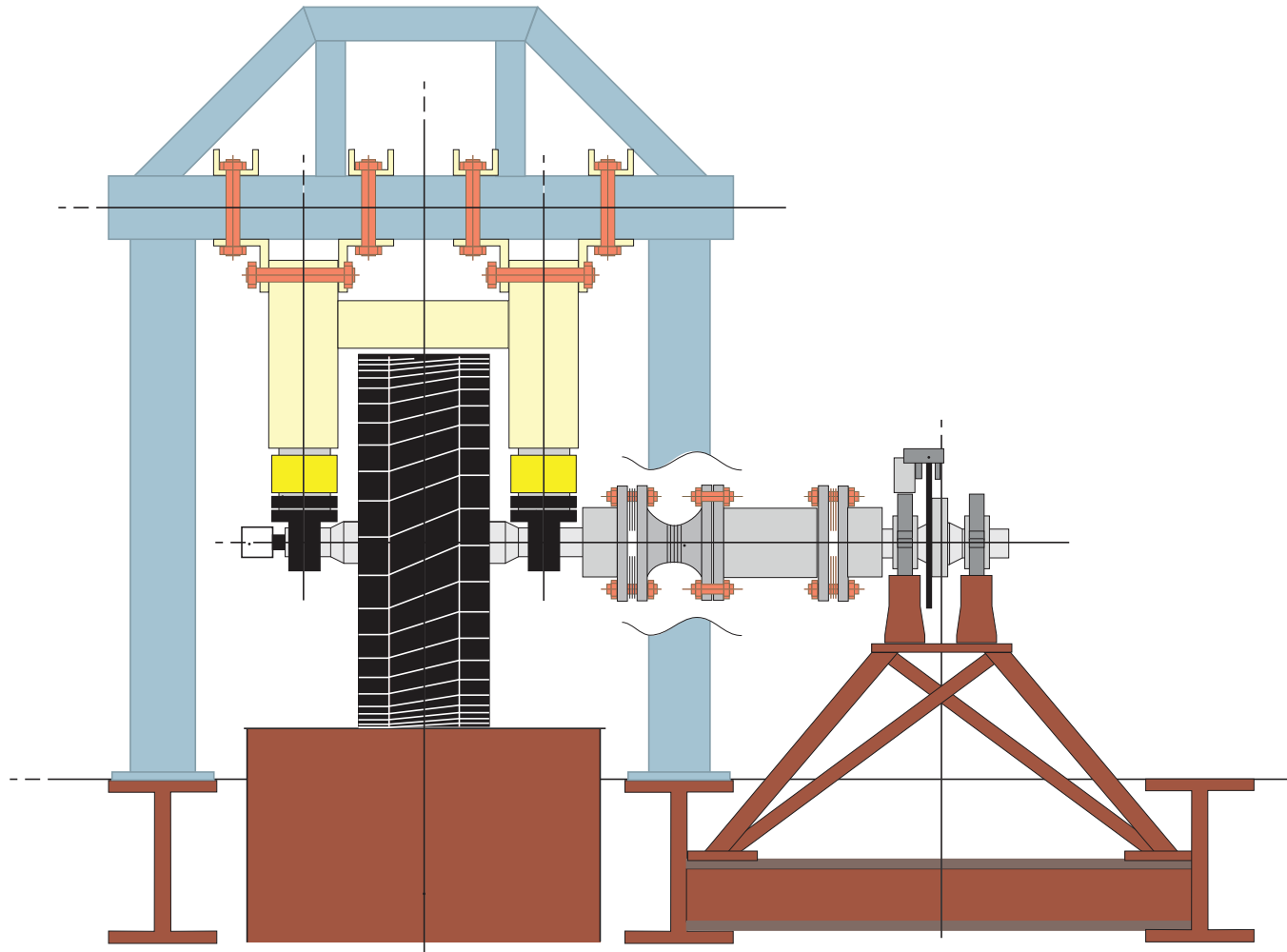
$$K_1^- < c, K_2^- < -\frac{c}{a}K_1^- \text{ et } 0 < K_3^- < \frac{-(cK_1^- + aK_2^-)(c - K_1^-)}{a}.$$

Supposons, de plus, que les gains K^+ et K^- vérifient

$$\frac{(c - K_1^-)}{aK_3^-} = \frac{(c - K_1^+)}{aK_3^+} > 0 \text{ et } (cK_1^+ + aK_2^+) = (cK_1^- + aK_2^-) < 0.$$

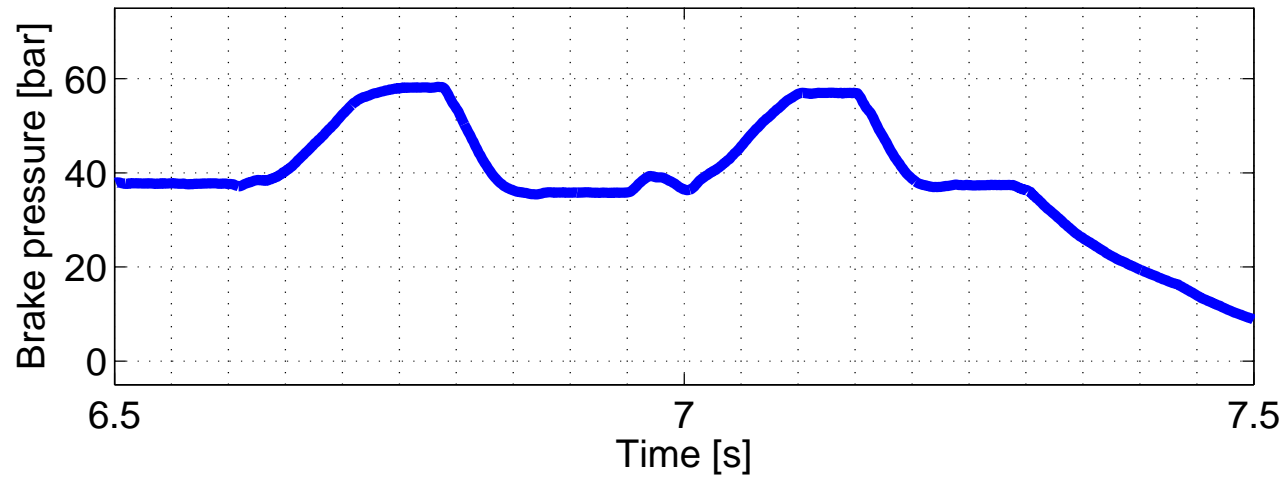
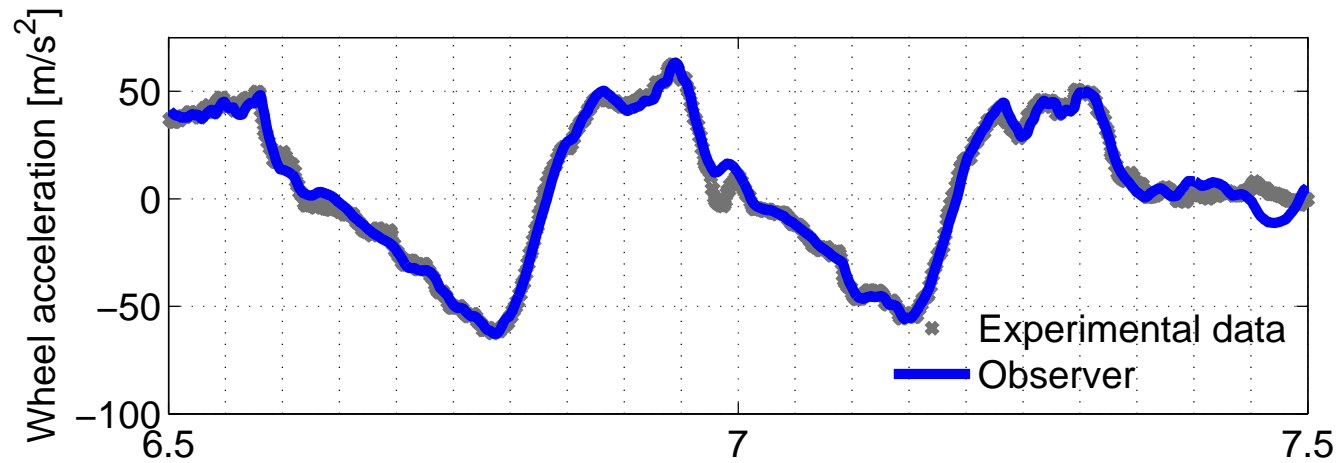
Alors, la dynamique d'erreur de l'observateur est globalement uniformément exponentiellement stable, pourvu que le signal de commutation σ possède un temps de maintien strictement positif.

Banc d'essai de TU-Delft^a

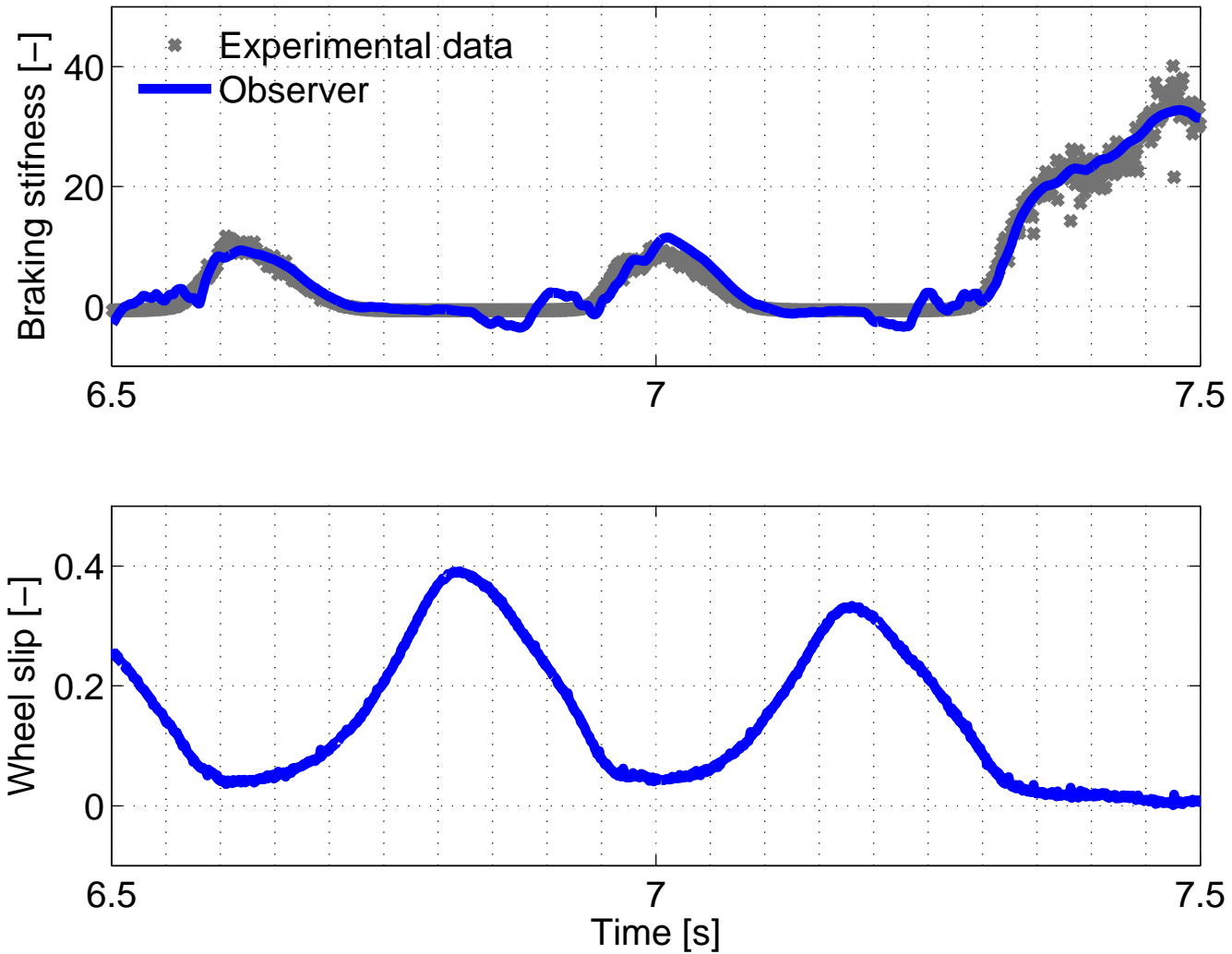


^aH. Pacejka. Tyre and Vehicle Dynamics. *Butterworth-Heinemann*, 2005.

Écart d'accélération angulaire & Pression de freinage



Rigidité de freinage étendue & Taux de glissement



Intrinsic characterization of our class of systems

We investigate now the existence of a **diffeomorphism** $z = \Phi(x)$ that brings a nonlinear system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x),$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ and $y(t) \in \mathbb{R}$ is the measurement (and both f and g are smooth), into a simpler system

$$\dot{z} = s(y)(Az + d(y)) + b(y)u, \quad y = Cz,$$

where the pair (A, C) is *observable* and the vector fields b and d depend on the output only, with $s(0) = 0$ but $s'(0) \neq 0$.

A technical lemma

Denote by $C^\infty(X_0)$ the ring of \mathbb{R} -valued C^∞ -functions defined locally in a neighborhood X_0 of $x_0 \in \mathbb{R}^n$. For a function $\varphi \in C^\infty(X_0)$, denote by $Z(\varphi)$ the **set of zeros** of φ , that is, $Z(\varphi) = \{x \in X_0 : \varphi(x) = 0\}$.

Lemma 1 Consider $\varphi \in C^\infty(X_0)$ and $\psi \in C^\infty(X_0)$ such that $d\psi(x_0) \neq 0$. The following conditions are equivalent :

(i) $\varphi = \alpha\psi$, for some $\alpha \in C^\infty(X_0)$;

(ii) $Z(\varphi) \subset Z(\psi)$;

(iii) The function $\alpha = \frac{\varphi}{\psi} \in C^\infty(X_0 \setminus Z(\psi))$ can be prolonged to a smooth function $\hat{\alpha} \in C^\infty(X_0)$, that is, there exists a function $\hat{\alpha} \in C^\infty(X_0)$ such that $\hat{\alpha}(x) = \alpha(x)$, for any $x \in X_0 \setminus Z(\psi)$;

(iv) If X'_0 is a compact containing x_0 in its interior, then there exists $M \in \mathbb{R}$ such that $|\frac{\varphi}{\psi}(x)| < M$, for any $x \in X'_0 \setminus Z(\psi)$.

A first necessary condition

We will work around a fixed initial condition $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and will assume that the diffeomorphism Φ satisfies $\Phi(x_0) = 0$.

Proposition 1 *If there exists a local diffeomorphism Φ transforming*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (5)$$

into

$$\dot{z} = s(y)(Az + d(y)) + b(y)u, \quad y = Cz, \quad (6)$$

then any among the equivalent conditions of Lemma 1 holds for all pairs

$$(\varphi, \psi) = (f_i, h),$$

with $1 \leq i \leq n$, where f_i is the i -th component of f and h is the output function.

A second necessary condition

If all pairs (f_i, h) of the original system (5) satisfy the equivalent conditions of Lemma 1 then, due to condition (iii), each $\frac{f_i}{h} = \alpha$ can be extended to a C^∞ -function $\hat{\alpha}$, which we will denote \hat{f}_i . Define the C^∞ -vector field $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i \partial / \partial x_i$.

A necessary condition for (5) to be transformed via $z = \Phi(x)$ into (6) is that the pair (\hat{f}, h) satisfies the following **local observability rank condition**

$$\dim \text{span} \{dh, dL_{\hat{f}}h, \dots, dL_{\hat{f}}^{n-1}h\}(x_0) = n.$$

In that case, define a **dummy vector field** \hat{g} by

$$L_{\hat{g}}L_{\hat{f}}^j h = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq j \leq n-2 \\ 1 & \text{if } j = n-1. \end{cases}$$

For $j \geq 2$ we put $l_j = \frac{j(j-1)}{2} + 1$. In order to avoid the trivial case, we will assume throughout $n \geq 2$.

Théorème 3 System (5) is, locally around x_0 , equivalent under a diffeomorphism $z = \Phi(x)$ to system (6), where $s(0) = 0$ and $s'(0) \neq 0$, if and only if in a neighborhood of x_0 all pairs $(\varphi, \psi) = (f_i, h)$ fulfill the conditions of Lemma 1 and the vector fields \hat{f} and \hat{g} satisfy

- (i) the pair (\hat{f}, h) satisfies at x_0 the local observability rank condition;
- (ii) $dL_{\hat{g}}L_{\hat{f}}^n h = l_n \lambda dL_{\hat{f}} h \text{ mod span } \{dh\}$, for some smooth function λ ;
- (iii) $[ad_{\bar{f}}^i \bar{g}, ad_{\bar{f}}^j \bar{g}] = 0$, for $0 \leq i < j \leq n - 1$, where $\bar{f} = \frac{1}{\bar{s}} \hat{f}$, $\bar{g} = \bar{s}^{n-1} \hat{g}$, and $\bar{s} = \exp \theta$, with θ being a solution of

$$L_{ad_{\bar{f}}^j \bar{g}} \theta = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq j \leq n - 2 \\ (-1)^{n-1} \lambda & \text{if } j = n - 1. \end{cases}$$

- (iv) $[g, ad_{\bar{f}}^j \bar{g}] = 0$, for $0 \leq j \leq n - 2$.

Moreover, $d(0) = 0$ if and only if $\hat{f}(x_0) = 0$.

Références

- [1] Hespanha, J. P. (2004). Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4), 470-482.
- [2] Balde, M., Boscain, U., & Mason, P. (2009). A note on stability conditions for planar switched systems. *International Journal of Control*, 82(10), 1882-1888.
- [3] Hoang, T. B., Pasillas-Lépine, W., De Bernardinis, A., & Netto, M. (2014). Extended braking stiffness estimation based on a switched observer, with an application to wheel-acceleration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(6), 2384-2392.
- [4] Hoang, T. B., Pasillas-Lépine, W., & Respondek, W. (2014). A switching observer for systems with linearizable error dynamics via singular time-scaling. Proceedings of *Mathematical theory of networks and systems*.

- [5] Pasillas-Lépine, W., Loría, A., & Gerard, M. (2012). Design and experimental validation of a nonlinear wheel slip control algorithm. *Automatica*, 48(8), 1852-1859.
- [6] Gerard, M., Pasillas-Lépine, W., De Vries, E., & Verhaegen, M. (2012). Improvements to a five-phase ABS algorithm for experimental validation. *Vehicle System Dynamics*, 50(10), 1585-1611.
- [7] Ait-Hammouda, I., & Pasillas-Lépine, W. (2008). Jumps and Synchronization in anti-lock brake algorithms. *Proceedings of Advanced vehicle control*, Kobe (Japan).
- [8] Pasillas-Lépine, W. (2006). Hybrid modeling and limit cycle analysis for a class of five-phase anti-lock brake algorithms. *Vehicle System Dynamics*, 44(2), 173-188.