

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
CRAN – CNRS UMR 7039
Université de Lorraine

<http://www.cran.univ-lorraine.fr/>

Observateurs pour les systèmes stochastiques

Groupe de travail sur l'observation
GDR MACS
Grenoble, 6 octobre 2015

Asma Barbata, Michel Zasadzinski, Harouna Souley Ali

barbata_asma@yahoo.fr, michel.zasadzinski@univ-lorraine.fr, harouna.souley@univ-lorraine.fr

Tel : 00 33 3 82 39 62 20 — Fax : 00 33 33 82 39 62 92

1/46

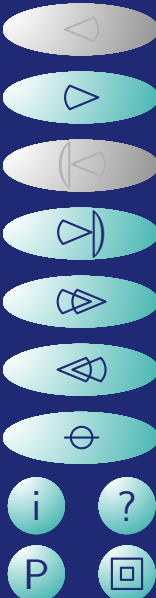
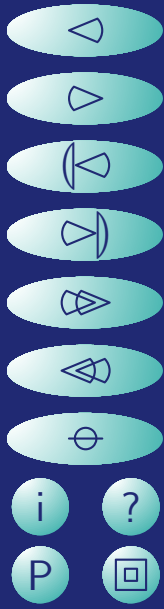
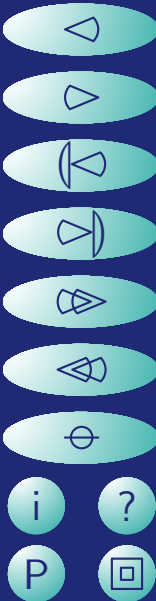


Table des matières

1. Introduction	4
2. Applications des systèmes stochastiques	5
3. Différences entre les systèmes déterministes et stochastiques	6
4. Equations différentielles stochastiques (EDS)	7
4A. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$	7
4B. Espérance	7
4C. Mouvement brownien	8
4D. Processus d'Itô et formule d'Itô	9
4D1. Définition d'un processus d'Itô	9
4D2. Formule d'Itô et différentiateur stochastique	10
4E. Solution d'une EDS : existence et unicité	11
5. Stabilités pour les systèmes stochastiques	12
6. Observateurs, détectabilité et observabilité	17
7. Observateurs et stabilité exponentielle presque sûre : formulation du problème	20



8. Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes stochastiques triangulaires	23
9. Filtrage d'ordre plein avec des mesures stochastiques	26
10. Equations algébro-différentielles stochastiques	27
10A. Parties dynamique et algébrique d'une équation algébro-différentielle stochastique	27
10B. Calcul d'Itô pour une EADS et fonctions de Lyapunov	28
10C. Indice 1 et admissibilité d'une EADS	30
11. Observateur avec des fonctions de Lyapunov polynomiales et une approche descripteur	31
12. Exemple numérique	37



Introduction

Un processus stochastique est décrit par une équation différentielle stochastique (EDS) avec des bruits **multiplicatifs**

$$dx = f(t, x, u, v) dt + g(t, x, u, v) dw \quad (1)$$

- $t \in \mathbb{R}^n$ est le temps,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées connues (commandes),
- $v(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des entrées inconnues (perturbations),
- $f(t, x, u, v)$ est la **dérivée** de l'EDS,
- $g(t, x, u, v)$ est la **diffusion** de l'EDS,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d$ est un processus de Wiener ou un mouvement brownien de moyenne nulle, multi-dimensionnel, indépendant et d'intensité unitaire
→ **$w(t)$ n'est pas dérivable par rapport au temps.**

Une formulation alternative de l'EDS (1) est l'intégrale stochastique suivante

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), u(s), v(s)) ds + \int_0^t g(s, x(s), u(s), v(s)) dw(s).$$

Applications des systèmes stochastiques

Au XIX^{ème} siècle, le mouvement brownien a été introduit pour décrire le comportement erratique du pollen.

Exemples d'application des systèmes stochastiques :

- économie : mathématiques financières et cours boursiers,
- biologie : modèles pour la génétique et l'évolution des populations,
- géologie : analyse des tremblements de terre,
- ingénierie : synthèse de commande prenant en compte les défaillances pouvant apparaître aléatoirement,
- informatique : modélisation des réseaux (protocoles de transmission des données sur Internet),
- électricité : modélisation des circuits électriques en tenant compte des bruits,
- physique et mécanique : description des mouvements des particules dans un gaz ou dans un milieu ionisé, physique quantique, ...



Différences entre les systèmes déterministes et stochastiques

- Systemes deterministes : On peut prévoir l'état du système à un instant futur connaissant son état à un instant initial.
- Systemes stochastiques : L'état du système à un instant futur connaissant son état à un instant initial n'est pas prévisible : on peut seulement estimer la probabilité qu'a le système d'être dans un état donné à un instant futur.

bruit multiplicatif

$$g(t, x(t)) dw$$



définitions spécifiques de la stabilité pour
les systèmes stochastiques



influence du bruit sur la stabilité

bruit additif

$$g(t) dw$$



problème de filtrage traité via le filtre de Kalman



pas d'influence du bruit sur la stabilité

Equations différentielles stochastiques (EDS)

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- Ω est l'ensemble des événements,
- \mathcal{F} est une tribu sur Ω ((i) contient l'ensemble vide, (ii) stable par passage au complémentaire (si une partie de Ω appartient à \mathcal{F} , alors son complémentaire dans Ω appartient à \mathcal{F} , (iii) à union dénombrable (l'union d'événements de \mathcal{F} est dans \mathcal{F})),
- $\mathcal{P}()$ est la mesure de la probabilité sur \mathcal{F} pour un événement dans Ω ((i) $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$, (ii) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, (iii) $\mathbf{P}(\cup A_i) = \sum \mathbf{P}(A_i)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$).

Espérance

Soit une variable aléatoire X définie dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathcal{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x), \quad (2)$$

où F est la fonction de distribution de X .

Mouvement brownien

Définition 1 (Processus de Wiener ou mouvement brownien). Sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , on définit un processus de Wiener ou un mouvement brownien $w(t)$ avec les propriétés suivantes :

- $w(t)$ a des incréments indépendants : Pour tout $n \geq 2$, les accroissements aléatoires $w(t_n) - w(t_{n-1}), w(t_{n-1}) - w(t_{n-2}), \dots, w(t_1) - w(t_0)$ sont indépendants pour tout $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$.
- Stationnarité : Pour tout $\delta > 0$, la loi de la variable $w(t + \delta) - w(t)$ ne dépend pas du temps t .
- Continuité : Le processus $w(t)$ est continu.
- Processus gaussien : Pour $s \leq t$, le processus $w(t) - w(s)$ est gaussien avec $w(t) - w(s) := \mathcal{N}(0, t - s)$.

Propriétés d'un mouvement brownien indépendant $w_i(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{w_i(t)}{t} = 0 \text{ p.s.}, \quad \mathbf{E}(dw_i) = 0, \quad \mathbf{E}(dw_i^2) = dt, \quad \mathbf{E}(dw_i dw_j) = 0. \quad (3)$$

Un mouvement brownien n'est pas dérivable par rapport au temps :

$$\frac{dw(t)}{dt} \approx \frac{\Delta w(t)}{\Delta t} \approx \frac{\pm 1}{\sqrt{\Delta t}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} = \pm \infty.$$

$$\frac{d}{dt}x = f(t, x) + g(t, x) \frac{d}{dt}w \longrightarrow \text{NON}, \quad dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw \longrightarrow \text{OUI}.$$

Processus d'Itô et formule d'Itô

La norme utilisée est $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ pour les vecteurs et $\|A\| = \left(\sum_{i,j} A_{i,j}^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ pour les matrices.

Définition d'un processus d'Itô

Définition 2 (Processus d'Itô). C'est un processus stochastique continu $x(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n de la forme

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw \quad (4)$$

avec $0 \leq t \leq T, x(0) \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes

- $f \in \mathcal{L}_1$ est une fonction module-intégrable $\rightarrow \int_0^T \|f(s)\| ds < \infty$ p.s. $\forall T > 0$,
- $g \in \mathcal{L}_2$ est une fonction carrée-intégrable $\rightarrow \int_0^T \|g(s)\|^2 ds < \infty$ p.s. $\forall T > 0$.

p.s. \rightarrow presque sûrement \rightarrow la probabilité d'un événement F est presque sûre si cet événement se produit avec une probabilité égale à 1 (c'est-à-dire que $\mathcal{P}(F) = 1$).

Propriétés d'un processus d'Itô

Le processus d'Itô décrit par $dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw$ vérifie

$$\mathbf{E} \left(\int_a^b g(t) dw(t) \right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \left(\left\| \int_a^b g(t) dw(t) \right\|^2 \right) = \mathbf{E} \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right). \quad (5)$$

Formule d'Itô et différenciateur stochastique

Théorème 1 (Itô formula). Soit un processus d'Itô $x(t)$. Pour toute fonction $\Phi(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et tout $0 \leq t \leq T$, $\Phi(t, x)$ est un processus d'Itô et vérifie l'équation différentielle stochastique suivante

$$d\Phi(t, x) = \mathcal{L}\Phi(t, x) dt + \mathfrak{B}\Phi(t, x) dw \quad (6)$$

où

$$\mathcal{L}\Phi(t, x) = \Phi_t(t, x) + \Phi_x(t, x)f(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(g(t, x)^T \Phi_{xx}(t, x)g(t, x)) \quad (7)$$

$$\mathfrak{B}\Phi(t, x) = \Phi_x(t, x)g(t, x) \quad (8)$$

avec

$$\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Phi_x = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right], \quad \Phi_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{L}(\cdot)$ est appelé “différenciateur stochastique”.

Solution d'une EDS : existence et unicité

La norme utilisée est $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ pour les vecteurs et $\|A\| = \left(\sum_{i,j} A_{i,j}^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ pour les matrices.

Théorème 2 (Existence et unicité). *S'il existe deux réels $k > 0$ et $c > 0$ tels que*

$$\|f(t, x)\| + \|g(t, x)\| \leq k(1 + \|x\|), \quad (9)$$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| + \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq c\|x - y\|, \quad (10)$$

alors il existe une solution unique à l'EDS

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw. \quad (11)$$

La condition de croissance linéaire (9) garantit l'existence d'une solution pour tout $t \geq 0$ (pas d'explosion en temps fini) et la condition de Lipschitz (10) garantit l'unicité de cette solution.

Théorème 3 (Existence et unicité, relaxation des conditions). *Si*

$$\exists k > 0 \text{ tel que } x^T f(t, x) + \frac{1}{2} \|g(t, x)\|^2 \leq k(1 + \|x\|^2) \quad (12)$$

$$\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \exists k_{2n} > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|x\| \vee \|y\| \leq n, \\ \|f(t, x) - f(t, y)\|^2 \vee \|g(t, x) - g(t, y)\|^2 \leq k_{2n} \|x - y\|^2, \quad (13)$$

alors il existe une solution unique à l'équation différentielle stochastique

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw. \quad (14)$$

Stabilités pour les systèmes stochastiques

Pour étudier la stabilité de l'EDS

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw \quad (15)$$

avec $f(t, 0) = 0$ et $g(t, 0) = 0$, le calcul d'Itô est appliqué à la fonction de Lyapunov $V(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ comme suit

$$dV(t, x) = \mathfrak{L}V(t, x) dt + \mathfrak{B}V(t, x) dw$$

avec

$$\mathfrak{L}V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(g^T(t, x) \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} g(t, x) \right),$$

$$\mathfrak{B}V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) g(t, x).$$

Il existent plusieurs types de stabilités pour les systèmes stochastiques.

- La stabilité en probabilité.
- La stabilité asymptotique en probabilité.
- La stabilité asymptotique en probabilité au sens large.
- **La stabilité exponentielle presque sûre** (ou exponentielle avec une probabilité de 1).
- **La stabilité exponentielle en moyenne quadratique.**
- La stabilité en moyenne quadratique.
- La stabilité asymptotique en moyenne quadratique.
- La bornitude exponentielle en moyenne quadratique.

Stabilité exponentielle presque sûre : (ASES pour almost sure exponential stability)

Définition 3. Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (15) est exponentiellement presque sûrement stable s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha < 0 \quad \text{p.s.} \quad (16)$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, où $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|)$ est l'exposant de Lyapunov de la solution $x(t)$.

La relation (16) est équivalente à l'existence d'une constante $\alpha > 0$ et d'une variable aléatoire finie $M > 0$ (donc $M < +\infty$) dépendant de x_0 et de t_0 (avec $t \geq t_0$) telle que

$$\|x(t)\| \leq M \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \text{p.s.} \quad (17)$$

Stabilité exponentielle en moyenne quadratique : (MSES pour mean-square exponential stability)

Définition 4. Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (15) est exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux constantes $c > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\mathbf{E}(\|x_0\|) < \varepsilon$ implique pour tout $t \geq 0$

$$\mathbf{E}\{\|x(t)\|^2\} \leq c \|x_0\|^2 e^{-\beta t}. \quad (18)$$

La relation (18) est équivalente à

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\mathbf{E}\{\|x(t)\|^2\}) < -\beta < 0. \quad (19)$$

Approches de type Lyapunov

$$dx = f(t, x) dt + g(t, x) dw \quad (15)$$

Théorème 4. *S'il existe $V(x) > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ et $c_3 \geq 0$ telles que, si $\forall x \neq 0$ et $\forall t \geq 0$,*

$$c_1 \|x\|^{c_0} \leq V(x), \quad (20a)$$

$$\mathfrak{L}V(x) \leq c_2 V(x), \quad (20b)$$

$$\|\mathfrak{B}V(x)\|^2 \geq c_3 V^2(x), \quad (20c)$$

alors

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x\|) \leq \frac{2c_2 - c_3}{2c_0} \quad p.s. \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (21)$$

et le point d'équilibre de l'EDS (15) est *exponentiellement presque sûrement stable* si

$$c_3 > 2c_2. \quad (22)$$

Théorème 5. *S'il existe $V(x) > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ telles que, si $\forall x \neq 0$ et $\forall t \geq 0$,*

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_0 \|x\|^2, \quad (23)$$

$$\mathfrak{L}V(x) \leq c_2 V(x) < 0, \quad (24)$$

alors le point d'équilibre de l'EDS (15) est *exponentiellement stable en moyenne quadratique, c-à-d*

$$\mathbf{E}\{\|x(t)\|^2\} \leq \frac{c_0}{c_1} \|x_0\|^2 e^{-c_2 t}.$$

- Cas général \rightarrow pas d'implication entre les stabilités exponentielle presque sûre et en moyenne quadratique.
- Si $\exists k > 0$ tel que $x^T f(x) \vee \|g(x)\|^2 \leq k \|x\|^2 \rightarrow$ stabilité exponentielle en moyenne quadratique \implies stabilité exponentielle presque sûre.
- Stabilité exponentielle en moyenne quadratique \rightarrow le bruit "déstabilise" et l'EDO de la dérive doit être stable $\rightarrow c_2 < 0$ et

$$\mathcal{L}V(x) = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)}_{<0} + \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(g^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x)g(x)\right)}_{\geq 0} \leq c_2 V(x).$$

- Stabilité exponentielle presque sûre \rightarrow le bruit "stabilise" ou "déstabilise" l'EDS et l'EDO de la dérive peut être instable

$$\text{EDS} \rightarrow dx = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} x dt + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} x dw$$

$$\text{solution} \rightarrow x(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} a - 0.5b^2 & 0 \\ 0 & a - 0.5b^2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} w\right) x_0$$

$$\text{exposant de Lyapunov} \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) = a - 0.5b^2 \quad \text{p.s.} \quad (\text{cas ASES})$$

$$\text{exposant de Lyapunov} \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\mathbf{E} \|x(t)\|^2) = 2a + b^2 \quad (\text{cas MSES})$$

EDO stable si $a < 0$ (avec $b = 0$)

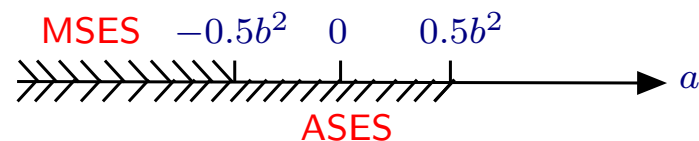


Fig.1 Stabilités MSES et ASES.

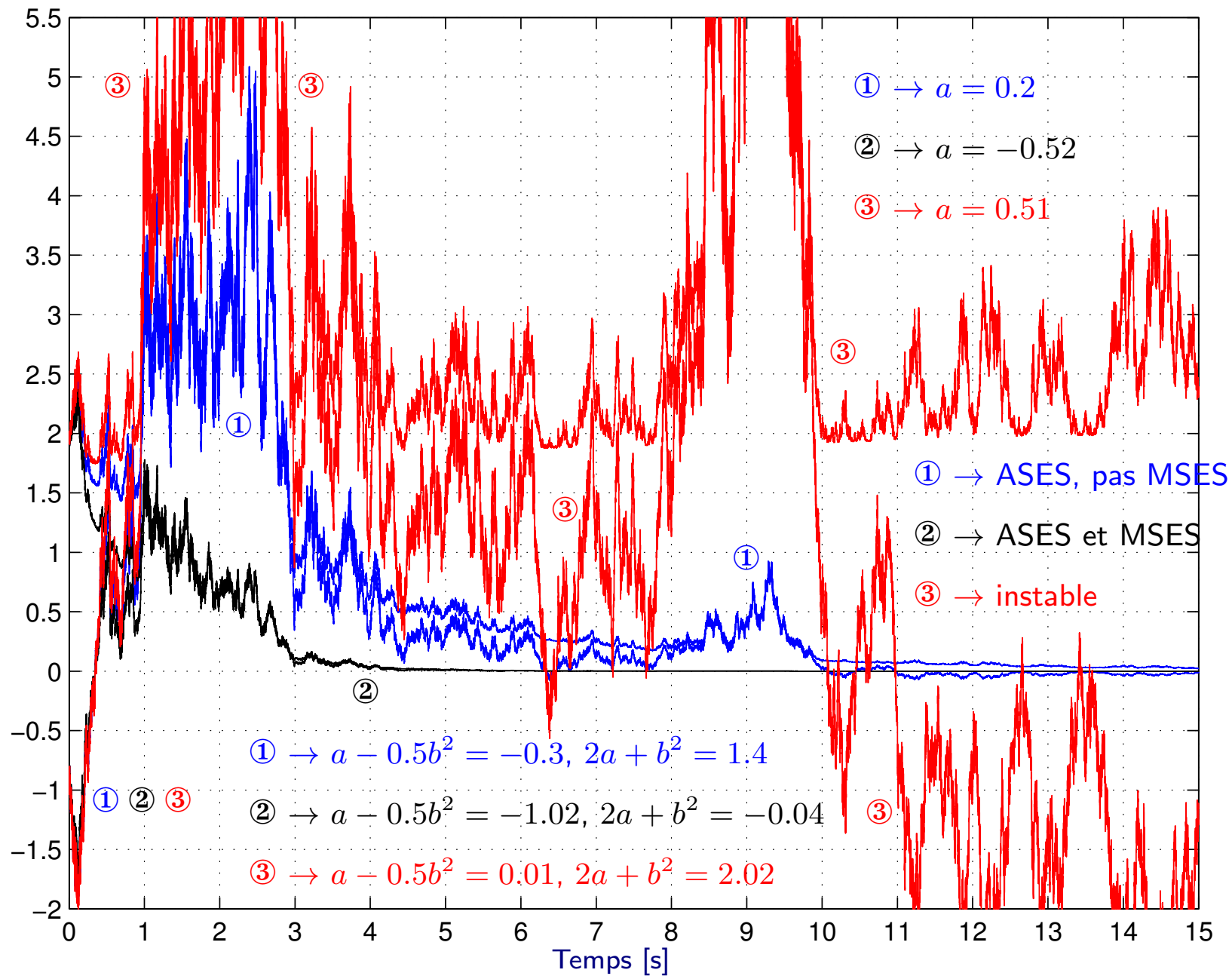


Fig.2 Solution $x(t)$ de l'EDS avec 3 valeurs pour a et avec $b = 1$.

Observateurs, détectabilité et observabilité

On considère le système stochastique suivant (x est l'état, y est la mesure et w_x et w_y sont des mouvements browniens)

$$dx = A_t x dt + A_w x dw_x \quad (25a)$$

$$dy = Cx dt + Dx dw_y \quad (25b)$$

Définition 5 (Détectabilité et observabilité). *Le système (25) est détectable en moyenne quadratique si*

$$\mathbf{E}(\|y(t, x_0)\|^2) = 0 \quad \forall t \geq 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(\|x(t, x_0)\|^2) = 0$$

et est exactement observable (l'observabilité exacte implique la détectabilité) si

$$y(t) \neq 0 \text{ p.s. } \forall t \geq 0 \implies x_0 \neq 0.$$

La détectabilité est nécessaire (mais pas suffisante) pour que l'EDS suivante soit MSES

$$de = (A_t - KC)e dt + A_w e dw_x - KDe dw_y \quad (26)$$

mais l'EDS (26) de l'erreur $e = x - \hat{x}$ est obtenue avec l'observateur **non réaliste** suivant

$$d\hat{x} = A_t \hat{x} dt + A_w \hat{x} dw_x + K(dy - d\eta) \quad (27a)$$

$$d\eta = C\hat{x} dt + D\hat{x} dw_y \quad (27b)$$

Si $w_x = w_y$, alors la détectabilité du système stochastique (25) est une condition nécessaire pour que l'erreur $e = x - \hat{x}$ soit MSES.

Avec l'observateur **réaliste** suivant

$$d\hat{x} = A_t \hat{x} dt + K(dy - C\hat{x} dt) \quad (28)$$

l'erreur $e = x - \hat{x}$ devient

$$de = (A_t - KC)e dt + (A_w - KD)x dw \quad (29)$$

et la détectabilité du système stochastique (25) ne peut pas être utilisée pour choisir le gain K afin que l'erreur $e = x - \hat{x}$ soit MSES.

La stabilité de l'erreur d'observation dépend alors de celle de l'état x et il faut déterminer le gain K pour que le système augmenté triangulaire suivant soit MSES

$$\begin{bmatrix} dx \\ de \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t & 0 \\ 0 & A_t - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} A_w x & 0 \\ A_w x & -KD x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_x \\ dw_y \end{bmatrix}$$

Pour que l'erreur $e = x - \hat{x}$ soit MSES, il faut donc que l'EDS du système

$$dx = A_t x dt + A_w x dw_x$$

soit aussi MSES \rightarrow la quasi-totalité de la littérature sur les observateurs pour les systèmes stochastiques (avec $f(0, u) = 0$, $g(0, u) = 0$, $h(0) = 0$ et $q(0) = 0$)

$$dx = f(x, u) dt + g(x, u) dw_x$$

$$dy = h(x) dt + q(x) dw_y$$

$$\begin{aligned} dx &= f(x, u) dt + g(x, u) dw_x \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

On a vu que, si l'hypothèse "relativement générale" ($a \vee b \iff \max(a, b)$)

$$x^T f(x) \vee \|g(x)\|^2 \leq k \|x\|^2$$

est vérifiée, alors MSES \implies ASES (la réciproque est fausse) \longrightarrow voir pages 15 et 16.

Ainsi la grande majorité des observateurs dans la littérature (qui sont basés sur la MSES) ne fonctionnent pas si le point d'équilibre de l'EDS du système à observer est **ASES**, **pas MSES** \longrightarrow l'état x converge exponentiellement presque sûrement vers zéro, mais pas les moments de cet état.

Dans la suite de cet exposé, nous allons nous intéresser à la synthèse d'observateurs avec la stabilité exponentielle presque sûre pour l'erreur d'observation.

Observateurs et stabilité exponentielle presque sûre : formulation du problème

20/46

On considère le système non linéaire décrit par les équations différentielles stochastiques (EDS) suivantes

$$dx = f(x, u) dt + g(x, u) dw_x \quad (32a)$$

$$dy = h(x) dt + q(x) dw_y \quad (32b)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des mesures, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des commandes et $w_x(t) \in \mathbb{R}^d$ et $w_y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ sont des mouvements browniens indépendants.

OBJECTIF : synthétiser un observateur de la forme

$$d\hat{x} = f(\hat{x}, u) dt + \psi(u)(dy - h(\hat{x}) dt) \quad (33)$$

où $\psi(u)$ est une matrice de gain à déterminer afin que l'erreur d'observation $e(t)$

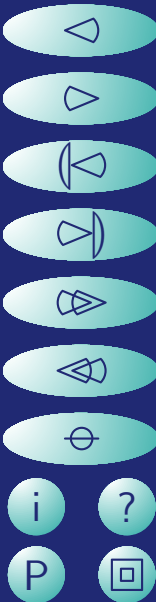
$$e = x - \hat{x} \quad (34)$$

soit exponentiellement stable presque sûrement.

La dynamique de l'erreur de filtrage est donnée par

$$de = (f(x, u) - f(x - e, u) - \psi(u)(h(x) - h(x - e))) dt + g(x, u) dw_x - \psi(u)q(x) dw_y \quad (35)$$

La stabilité exponentielle presque sûre de $e(t)$ nécessite la stabilité exponentielle presque sûre de $x(t)$.



Structure triangulaire des EDS (32a) et (35)

$$dX = F(X, u) dt + G(X, u) dw \quad (36)$$

avec

$$F(X, u) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}, u) \\ f(\mathbf{x}, u) - f(\mathbf{x} - e, u) - \psi(u)(h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x} - e)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, e, u) \end{bmatrix},$$

$$G(X, u) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}, u) & 0 \\ g(\mathbf{x}, u) & -\psi(u)q(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, u) \\ g_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}.$$

Puisque $G(X, u) = 0$ si $X = [0^T \ e^T]^T$, on a

$$\mathfrak{B}V(X) \Big|_{X=\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}} = 0, \quad (37)$$

la condition (20c) du théorème 4, donnée par

$$\|\mathfrak{B}V(X)\|^2 \geq c_3 V^2(X),$$

implique que $c_3 = 0$. On ne peut donc pas appliquer le théorème 4 si $c_2 \geq 0$ dans les relations (20b) et (22) du théorème 4 données par

$$\mathfrak{L}V(x) \leq c_2 V(x),$$

$$c_3 > 2c_2.$$

$$dX = F(X, u) dt + G(X, u) dw = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, e, u) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, u) \\ g_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_x \\ dw_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

avec $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}$.

SOLUTION PROPOSEE : exploiter la structure triangulaire de l'EDS (36).

Deux cas vont être étudiés :

- **Exploitation de la structure triangulaire avec une condition de type Lipschitz.**
- **Exploitation de la structure triangulaire avec une condition de type one-sided Lipschitz.**

Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes stochastiques triangulaires

23/46

$$\text{On pose : } \begin{cases} x(t) & \longrightarrow & x_1(t) \\ e(t) & \longrightarrow & x_2(t) \end{cases}$$

On considère une classe d'EDS ayant la même structure triangulaire que l'EDS (36)

$$dx_1 = f_1(x_1, u) dt + g_1(x_1, u) dw \quad (38a)$$

$$dx_2 = f_2(x_1, x_2, u) dt + g_2(x_1, u) dw \quad (38b)$$

et l'EDS "bloc-diagonale" (ou découplée)

$$d\bar{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, u) dt + g_1(\bar{x}_1, u) dw \quad (39a)$$

$$d\bar{x}_2 = f_2(0, \bar{x}_2, u) dt \quad (39b)$$

avec $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\bar{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Par construction, on a $f_1(0, u) = 0$, $f_2(0, 0, u) = 0$, $g_1(0, u) = 0$ et $g_2(0, u) = 0$.

On va étudier la stabilité exponentielle presque sûre de l'EDS (38) avec l'EDS (39).

Si la dérive $f(X)$ est Lipschitz

$$dx_1 = f_1(x_1, u) dt + g_1(x_1, u) dw \quad (38a)$$

$$dx_2 = f_2(x_1, x_2, u) dt + g_2(x_1, u) dw \quad (38b)$$

$$d\bar{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, u) dt + g_1(\bar{x}_1, u) dw \quad (39a)$$

$$d\bar{x}_2 = f_2(0, \bar{x}_2, u) dt \quad (39b)$$

On fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1. *Il existe un réel $k > 0$ tel que, $\forall t \geq 0$,*

$$\|f_2(x_1, x_2, u) - f_2(0, \bar{x}_2, u)\| \leq k (\|x_1\| + \|x_2 - \bar{x}_2\|), \quad (40a)$$

$$\text{tr}((g_1(x_1, u) - g_1(\bar{x}_1, u))(g_1(x_1, u) - g_1(\bar{x}_1, u))^T) \leq k \|x_1 - \bar{x}_1\|^2, \quad (40b)$$

$$\text{tr}((g_2(x_1, u) - g_2(\bar{x}_1, u))(g_2(x_1, u) - g_2(\bar{x}_1, u))^T) \leq k \|x_1 - \bar{x}_1\|^2. \quad (40c)$$

Théorème 6. *Avec l'hypothèse 1, le point d'équilibre de l'EDS (38) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement si le point d'équilibre de l'EDS (39) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Démonstration. La démonstration est omise. Elle est basée sur les exposants de Lyapunov des solutions des EDS. •

Si la dérive $f(X)$ est one-sided Lipschitz

Définition 6. La fonction $f(X)$ est one-sided Lipschitz s'il existe une constante $\rho \in \mathbb{R}$ telle que

$$(X - \bar{X})^T (f(X) - f(\bar{X})) \leq \rho \|X - \bar{X}\|^2. \quad (41)$$

On fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2. Il existe deux réels \bar{k}_f et $\bar{k}_g > 0$ tels que, $\forall t \geq 0$,

$$(x_2 - \bar{x}_2)^T (f_2(x_1, x_2, u) - f_2(0, \bar{x}_2, u)) \leq \bar{k}_f \left((x_2 - \bar{x}_2)^T x_1 + \|x_2 - \bar{x}_2\|^2 \right), \quad (42a)$$

$$\text{tr} \left((g_1(x_1, u) - g_1(\bar{x}_1, u))(g_1(x_1, u) - g_1(\bar{x}_1, u))^T \right) \leq \bar{k}_g \|x_1 - \bar{x}_1\|^2, \quad (42b)$$

$$\text{tr} \left((g_2(x_1, u) - g_2(\bar{x}_1, u))(g_2(x_1, u) - g_2(\bar{x}_1, u))^T \right) \leq \bar{k}_g \|x_1 - \bar{x}_1\|^2. \quad (42c)$$

Théorème 7. Avec l'hypothèse 2, le point d'équilibre de l'EDS (38) est exponentiellement presque sûrement stable *si et seulement si* le point d'équilibre de l'EDS (39) est exponentiellement presque sûrement stable.

Démonstration. La démonstration est omise. Elle est basée sur les exposants de Lyapunov des solutions des EDS. •

Filtrage d'ordre plein avec des mesures stochastiques

26/46

Les théorèmes 6 et 7 permettent d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 8 (Filtrage des systèmes stochastiques non linéaires avec la stabilité exponentielle presque sûre). *Si les conditions suivantes sont vérifiées*

- a) *l'EDS (36) vérifie les conditions d'existence et d'unicité de la solution,*
- b) *une des deux hypothèses, 1 ou bien 2, est vérifiée,*
- c) *le point d'équilibre de l'EDS (32a) est exponentiellement presque sûrement stable,*
- d) *il existe une matrice de gain $\psi(u)$ telle que l'EDO*

$$\dot{\bar{e}} = -f(-\bar{e}, u) + \psi(u)h(-\bar{e}) \quad (43)$$

soit exponentiellement stable,

alors le système (33) est un observateur d'ordre plein pour le système stochastique (32) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage $e = x - \hat{x}$.

Equations algébro-différentielles stochastiques

Parties dynamique et algébrique d'une équation algébro-différentielle stochastique

27/46

On considère l'équation algébro-différentielle stochastique (EADS) suivante

$$E dx = f(x) dt + g(x) dw \quad (44)$$

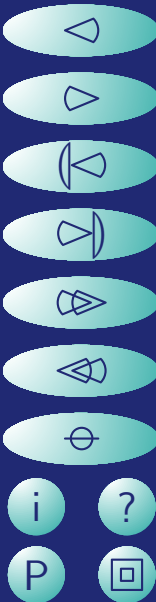
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le pseudo-état,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien de moyenne nulle, multi-dimensionnel, indépendant et d'intensité unitaire,
- $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$,
- $f(x)$ est la dérive de l'EADS (44),
- $g(x)$ est la diffusion de l'EADS (44),
- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{rang}(E) = r < n \rightarrow E$ est **singulière**.

$f(x)$ est module-intégrable et $g(x)$ est carrée-intégrable.

Le pseudo-état x peut être décomposé $\rightarrow x = x_u + x_v \rightarrow \{x_u\} \oplus \{x_v\} = \mathbb{R}^n$:

- une partie "dynamique" $\rightarrow x_u = E^+ E x \rightarrow E x_u = E x$,
- une partie "algébrique" $\rightarrow x_v = (I_n - E^+ E) x \rightarrow E x_v = 0$,

où E^+ est une inverse généralisée réflexive de $E \rightarrow E = E E^+ E$ et $E^+ = E^+ E E^+$.



Extension de la formule d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques non linéaires.

Calcul d'Itô pour une EADS et fonctions de Lyapunov

$$E dx = f(x) dt + g(x) dw$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} EE^+ \\ I_n - EE^+ \end{bmatrix} E dx = \begin{bmatrix} EE^+ \\ I_n - EE^+ \end{bmatrix} (f(x) dt + g(x) dw)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E dx_u = EE^+ f(x_u + x_v) dt + EE^+ g(x_u + x_v) dw \\ 0 = (I_n - EE^+) f(x_u + x_v) dt + (I_n - EE^+) g(x_u + x_v) dw \end{cases}$$

Puisque les bruits ne doivent pas affecter les contraintes algébriques, l'EADS ci-dessus devient

$$\begin{cases} E dx_u = EE^+ f(x_u + x_v) dt + EE^+ g(x_u + x_v) dw, \\ 0 = (I_n - EE^+) f(x_u + x_v), \\ 0 = (I_n - EE^+) g(x_u + x_v), \end{cases}$$

et, puisque $E^+ E x_u = x_u$, on obtient l'EDS suivante

$$dx_u = E^+ f(x_u + x_v) dt + E^+ g(x_u + x_v) dw, \quad (45a)$$

$$0 = (I_n - EE^+) f(x_u + x_v), \quad (45b)$$

$$0 = (I_n - EE^+) g(x_u + x_v). \quad (45c)$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante $V(x) = x^T E^T P x$ avec $E^T P = P^T E \geq 0$.

Puisque $Ex = Ex_u$, on a $V(x) = V(x_u)$.

L'application de la **formule d'Itô** sur l'équation (45a) donne

$$dV(x_u) = \mathcal{L}V(x_u) dt + \mathfrak{B}V(x_u) dw,$$

$$\mathcal{L}V(x_u) = V_{x_u}(x_u) E^+ f(x_u + x_v) + \frac{1}{2} \text{tr}(g^T(x_u + x_v) (E^+)^T V_{x_u x_u}(x_u) E^+ g(x_u + x_v)),$$

$$\mathfrak{B}V(x_u) = V_{x_u}(x_u) E^+ g(x_u + x_v).$$

Puisque $x_u^T P^T E = x_u^T E^T P = x^T E^T P = x^T P^T E$, les relations ci-dessus sont équivalentes à

$$dV(x) = \mathcal{L}V(x) dt + \mathfrak{B}V(x) dw, \quad (46)$$

$$\mathcal{L}V(x) = f^T(x) P x + x^T P^T f(x) + \text{tr}(g^T(x) (E^+)^T E^T P E^+ g(x)), \quad (47)$$

$$\mathfrak{B}V(x) = 2x^T P^T g(x). \quad (48)$$

si et seulement si les conditions (45b) et (45c) sont satisfaites.

Indice 1 et admissibilité d'une EADS

L'EADS (44) est d'indice 1 si

- Les contraintes algébriques sont uniquement solvables pour les variables algébriques, c'est-à-dire que les contraintes algébriques (45b) ont une solution unique x_v en fonction de x_u . Ceci peut être fait **si et seulement si**

$$\det\left(E + (I_n - EE^+) \frac{df(x)}{dx}\right) \neq 0, \quad (49)$$

- le bruit n'apparaît pas dans les contraintes algébriques, c'est-à-dire que la condition (45c) doit être satisfaite ($\iff \text{Im}(g(x)) \subseteq \text{Im}(E), \forall x \in \mathbb{R}^n$).

La stabilité de l'EADS (44) est équivalente à la stabilité de l'EDS (45a).

Définition 7. L'EADS (44) est **admissible** si

- l'EADS (44) est d'**indice 1**,
- le point d'équilibre de l'EADS (44) est **stable**.

Si $f(x) = Ax$, la condition (49) est équivalente à la régularité et à la causalité de l'équation algèbro-différentielle $E\dot{x} = Ax$ avec

- régularité : $\det(sE - A) \neq 0$ ($E\dot{x} = Ax$ a une solution $x(t)$ unique),
- causalité (pas de modes impulsifs ou pas de valeurs propres infinies) :
 $\deg(\det(sE - A)) = \text{rang}(E)$.

Observateur avec des fonctions de Lyapunov polynomiales et une approche descripteur

31/46

On considère le système stochastique suivant

$$dx = \left(A_{t_0}x + \sum_{i=1}^m u_i A_{t_i}x + \ell(x) \right) dt + \sum_{j=1}^d A_{w_j}x dw_{x_j} \quad (50a)$$

$$dy = Cx dt + \sum_{k=1}^h D_k x dw_{y_k} \quad (50b)$$

La fonction $\ell(x)$ est **one-sided Lipschitz**, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que

$$(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \leq a \|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall x_2 \in \mathbb{R}^n \quad (51)$$

et **quadratiquement bornée**, c'est-à-dire qu'il existe deux réels b et c tels que

$$\|\ell(x_1) - \ell(x_2)\|^2 \leq b \|x_1 - x_2\|^2 + c(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (52)$$

L'ensemble $\bar{\Omega}$ **des entrées admissibles $u(t)$** est défini comme suit

$$\bar{\Omega} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{i \min} \leq u_i(t) \leq u_{i \max}, \mu_{i, \min} \leq \dot{u}_i(t) \leq \mu_{i, \max}\}. \quad (53)$$

On introduit le vecteur $\zeta(t)$ suivant

$$\zeta^T = \left[\underbrace{\zeta_1 \dots \zeta_m}_{u_i} \quad \underbrace{\zeta_{m+1} \dots \zeta_{2m}}_{\dot{u}_i} \right] = \left[u_1 \dots u_m \quad \dot{u}_1 \dots \dot{u}_m \right]. \quad (54)$$

$\zeta(t) \in \mathcal{P}$ où \mathcal{P} est le polytope convexe défini par

$$\mathcal{P} = [u_{1 \min}, u_{1 \max}] \times \dots \times [u_{m \min}, u_{m \max}] \times [\mu_{1 \min}, \mu_{1 \max}] \times \dots \times [\mu_{m \min}, \mu_{m \max}]. \quad (55)$$

L'ensemble des $\nu = 2^{2m}$ sommets du polytope \mathcal{P} est \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \{ \beta = [\beta_1 \dots \beta_i \dots \beta_{2m}]^T \in \mathbb{R}^{2m} \mid \forall i \in [1, m], \beta_i \in \{u_{i \min}, u_{i \max}\} \text{ et} \\ \forall i \in [m + 1, 2m], \beta_i \in \{\mu_{i \min}, \mu_{i \max}\} \}. \quad (56)$$

OBJECTIF : Synthétiser un observateur de la forme suivante

$$d\hat{x} = \left(A_{t_0}\hat{x} + \sum_{i=1}^m u_i A_{t_i}\hat{x} + \ell(\hat{x}) \right) dt + \left(K_0 + \sum_{i=1}^m K_i u_i \right) (dy - C\hat{x} dt) \quad (57)$$

où K_0 et K_i sont des gains à déterminer pour que l'erreur d'observation

$$e = x - \hat{x} \quad (58)$$

soit exponentiellement stable presque sûrement (ASES).

La dynamique de l'erreur d'observation est donnée par

$$de = \left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^m (A_{t_i} - K_i C) u_i \right) e + \ell(x) - \ell(\hat{x}) \right) dt + \sum_{j=1}^d A_{w_j} x dw_{x_j} - \left(K_0 + \sum_{i=1}^m K_i u_i \right) \left(\sum_{k=1}^h D_k x dw_{y_k} \right). \quad (59)$$

Afin de diminuer le pessimisme des fonctions de Lyapunov du type $V(x) = x^T P x$, on a étendu les résultats précédents en utilisant la fonction de Lyapunov polynomiale suivante

$$V_x(x, u) = x^T (P_0 + \sum_{i=1}^m P_i u_i) x = x^T P(\zeta) x$$

avec les commandes $u_i(t)$ bornées (appartenant à un polytope convexe \rightarrow LMI pour chaque sommet).

Afin de conserver la convexité en évitant les produits $u_i u_j$ et de ne pas avoir de produit entre la matrice d'état et les matrices P_i de Lyapunov, on a utilisé l'approche descripteur suivante

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\eta \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell(x) \\ 0 \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_w(x) \\ 0 \end{bmatrix} dw_x \quad (60)$$

avec $\mathcal{A}_t(\zeta) = A_{t_0} + \sum_{i=1}^m A_{t_i} \zeta_i$ et $\mathcal{A}_w(x) = [A_{w_1} x \ \dots \ A_{w_d} x]$.

La fonction de Lyapunov candidate $V_x(x)$ est donc reformulée comme suit

$$\begin{aligned} V_x(x) &= x^T P(\zeta) x = x^T (P_0 + \sum_{i=1}^m P_i \zeta_i) x \\ &= \bar{V}_x(x, \eta) = \underbrace{\begin{bmatrix} x^T & \eta^T \end{bmatrix}}_{E^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\zeta) & 0 \\ F & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}}_{\mathbb{P}(\zeta)} \end{aligned} \quad (61)$$

avec la contrainte

$$E^T \mathbb{P}(\zeta) = \mathbb{P}^T(\zeta) E \geq 0. \quad (62)$$

La même approche descripteur avec une fonction de Lyapunov polynomiale est utilisée pour la stabilité de l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$.

Détermination des gains de l'observateur \rightarrow application du théorème 8.

Théorème 9. On considère que l'hypothèse 2 et les conditions (51) et (52) sont satisfaites. Soit $\beta^k \in \mathcal{S}$ les vecteurs définis dans (56). Il existe $P(\zeta) = P^T(\zeta)$, $Q(\zeta) = Q^T(\zeta) > 0$, F , G et \mathcal{Y} et des réels $c_1 > 0$, $\varepsilon_1^k > 0$, $\varepsilon_2^k > 0$, $\varepsilon_3^k > 0$ et $\varepsilon_4^k > 0$ (pour $i = 1, \dots, d$) tels que les LMI suivantes soient vérifiées pour tout $k = 1, \dots, 2^{2m}$

$$0 < c_1 I_n \leq P(\beta^k) \tag{63}$$

$$\begin{bmatrix} (a) & \star & \star & \star & \dots & \star \\ (b) & -F - F^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (c) & 0 & -\varepsilon_2^k I_n & 0 & \dots & 0 \\ P(\beta^k) A_{w_1} & 0 & 0 & -P(\beta^k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ P(\beta^k) A_{w_d} & 0 & 0 & \dots & 0 & -P(\beta^k) \end{bmatrix} < 0, \tag{64}$$

$$\begin{bmatrix} (d) & \star & \star \\ G^T \mathcal{A}_t(\beta^k) - \mathcal{Y}C(\beta^k) + Q(\beta^k) - G & -G - G^T & 0 \\ Q(\beta^k) - \left(\frac{\varepsilon_3^k}{2} - \frac{\varepsilon_4^k c}{2}\right) I_n & 0 & -\varepsilon_4^k I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{65}$$

Théorème 9 (suite).

où $\rho_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, d$) sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^d \rho_j$, et où

$$(a) = \mathcal{A}_t^T(\beta^k)F + F^T \mathcal{A}_t(\beta^k) - \rho P(\beta^k) + \dot{P}(\beta^k) + (\varepsilon_1^k a + \varepsilon_2^k b)I_n,$$

$$(b) = F^T \mathcal{A}_t(\beta^k) + P(\beta^k) - F,$$

$$(c) = P(\beta^k) - \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2 c}{2}\right)I_n,$$

$$(d) = \mathcal{A}_t^T(\beta^k)G + G^T \mathcal{A}_t(\beta^k) - C^T(\beta^k)\mathcal{Y}^T - \mathcal{Y}C(\beta^k) + \dot{Q}(\beta^k) + (\varepsilon_3^k a + \varepsilon_4^k b)I_n,$$

et si, pour tout $i = 1, \dots, d$ et $k = 1, \dots, 2^{2m}$, l'une des deux LMI suivantes

$$A_{w_i}^T P(\beta^k) + P(\beta^k) A_{w_i} - \sqrt{2\rho_i} P(\beta^k) > 0, \quad (66)$$

$$A_{w_i}^T P(\beta^k) + P(\beta^k) A_{w_i} + \sqrt{2\rho_i} P(\beta^k) < 0, \quad (67)$$

est satisfaite,

alors le système (57) est un observateur pour le système stochastique (50) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage avec $K_i = G^{-T} Y_i$ ($i = 1, \dots, m$) et $\mathcal{Y} = [Y_0 \ \dots \ Y_m]$.

Notations : $P(\zeta) = P_0 + \sum_{i=1}^m P_i \zeta_i$, $\dot{P}(\zeta) = \sum_{i=m+1}^{2m} P_i \zeta_i$, $Q(\zeta) = Q_0 + \sum_{i=1}^m Q_i \zeta_i$,
 $\dot{Q}(\zeta) = \sum_{i=m+1}^{2m} Q_i \zeta_i$, $\mathcal{A}_t(\zeta) = A_{t_0} + \sum_{i=1}^m A_{t_i} \zeta_i$, $C(\zeta) = \begin{bmatrix} C^T & C^T \zeta_1 & \dots & C^T \zeta_m \end{bmatrix}^T$.

Exemple numérique

Pour illustrer les développements ci-dessus sur l'observateur d'ordre plein, on considère le système stochastique (50) avec $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, $h = 1$ et les matrices suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.01 \\ 0 & 1 & 0.02 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{t_2} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.01 & 0 \\ 0.05 & 1 & 0.01 \\ 0.03 & 0.01 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -3.6492 & 0.047222 & 0.53139 \\ -0.27208 & -3.9014 & -0.63181 \\ 0.058333 & 0.038889 & -3.5194 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\ell(x) = \left[-2(x_1^3 + x_1) \quad -2(x_2^3 + x_2) \quad -2(x_3^3 + x_3) \right]^T.$$

L'espace des entrées admissibles $\bar{\Omega}$ est défini en (53) avec les bornes suivantes sur ces entrées

$$u_{1,\min} = -0.2, u_{1,\max} = 0.2, u_{2,\min} = -0.2, u_{2,\max} = 0.2,$$

$$\mu_{1\min} = -3.2, \mu_{1\max} = 3.2, \mu_{2\min} = -2.6, \mu_{2\max} = 2.6.$$

La fonction $\ell(x)$ est one-sided Lipschitz avec $a = 0$ dans (51) et quadratiquement bornée avec $b = -150$ et $c = -145$ dans (52).

Avec $\rho = \rho_1 = 20$ et $c_1 = 7.4579$, la résolution des LMI du théorème 9 sur les $2^{2m} = 16$ sommets du polytope \mathcal{P} a donné les gains suivants pour l'observateur

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.0015048 & 37.05 \\ 0.0045352 & 33.401 \\ 2.7156 & -67.839 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0.021572 & 0.98414 \\ -0.015087 & 3.1885 \\ 0.16917 & -4.1046 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.008091 & 2.9669 \\ -0.0067438 & 1.8169 \\ 0.16791 & -4.0968 \end{bmatrix}.$$

La convergence exponentielle presque sûre de l'erreur d'estimation est illustrée dans les figures 3, 4, 5 et 6.

L'intérêt de l'approche descripteur et des fonctions de Lyapunov polynomiales est illustré avec les figures 7, 8 et 9 où les fonctions de Lyapunov sont

$$\mathcal{V}_x(x) = x^T \mathcal{P}_0 x \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_e(\bar{e}) = \bar{e}^T \mathcal{Q}_0 \bar{e} \quad (68)$$

avec $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^T > 0$ et $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0^T > 0$. Dans ce cas les LMI du théorème 9 se simplifient et leur résolution sur les $2^m = 4$ sommets du polytope convexe (les min et les max de u_1 et u_2) avec $\rho = \rho_1 = 20$ a donné les gains suivants pour l'observateur

$$K_0 = \begin{bmatrix} -96.974 & -3.94 \\ -97.37 & 51.509 \\ 1.3016 & 145.91 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -7.4669 & 1.9271 \\ -6.7244 & 5.2873 \\ 2.2709 & 10.299 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.1499 & 2.7524 \\ 2.0194 & 0.69401 \\ 2.2513 & -2.8084 \end{bmatrix}.$$

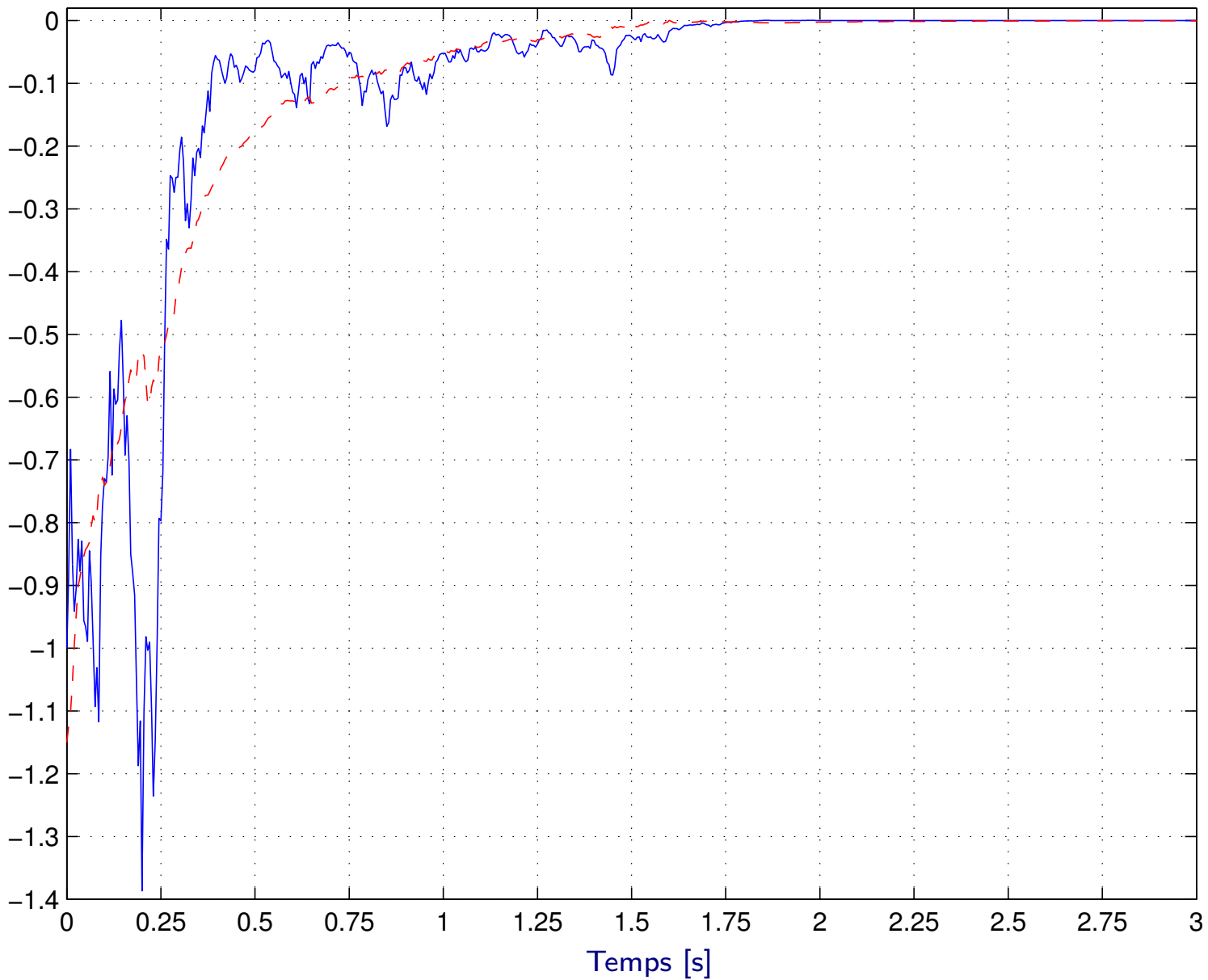


Fig.3 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu).



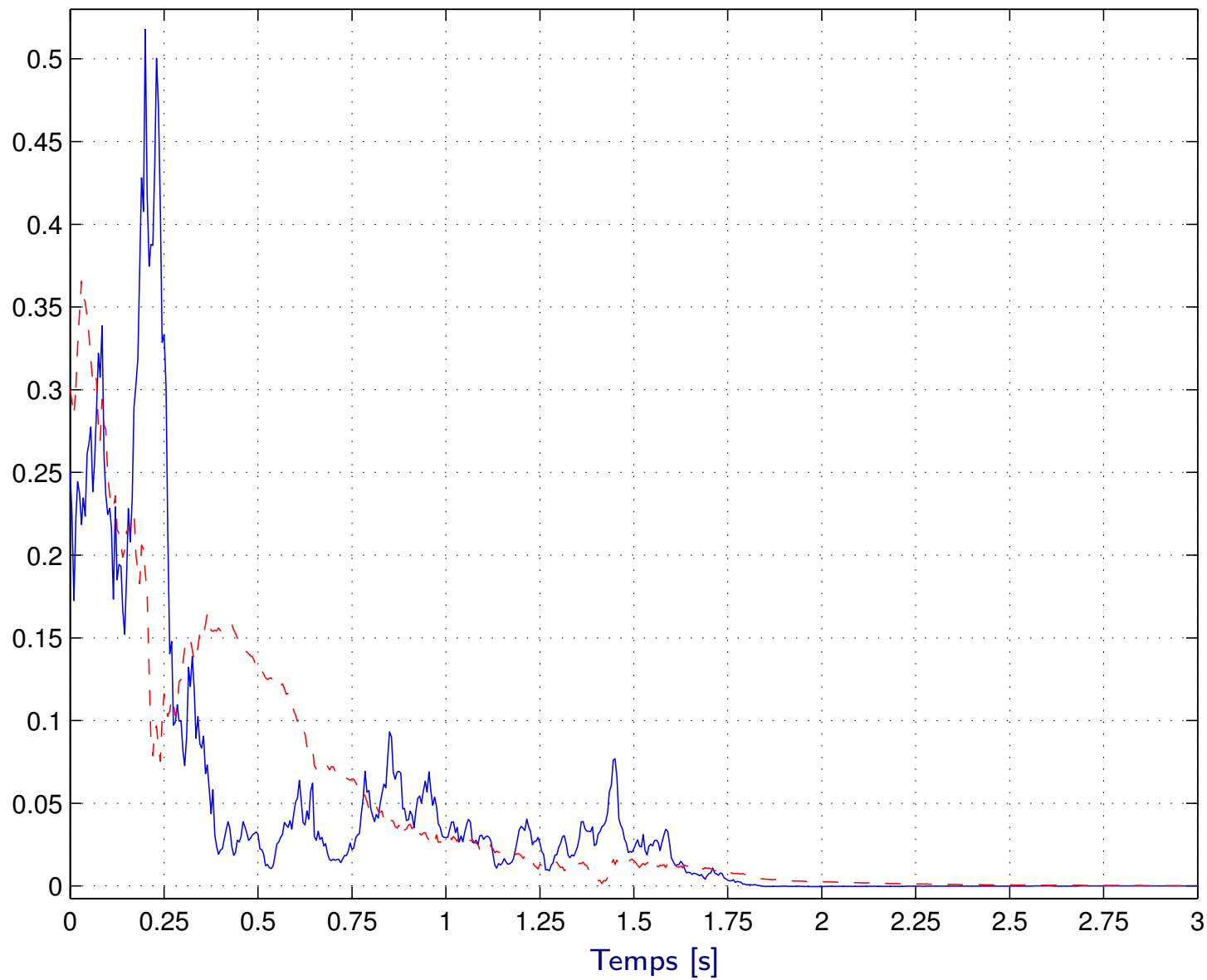


Fig.4 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu).



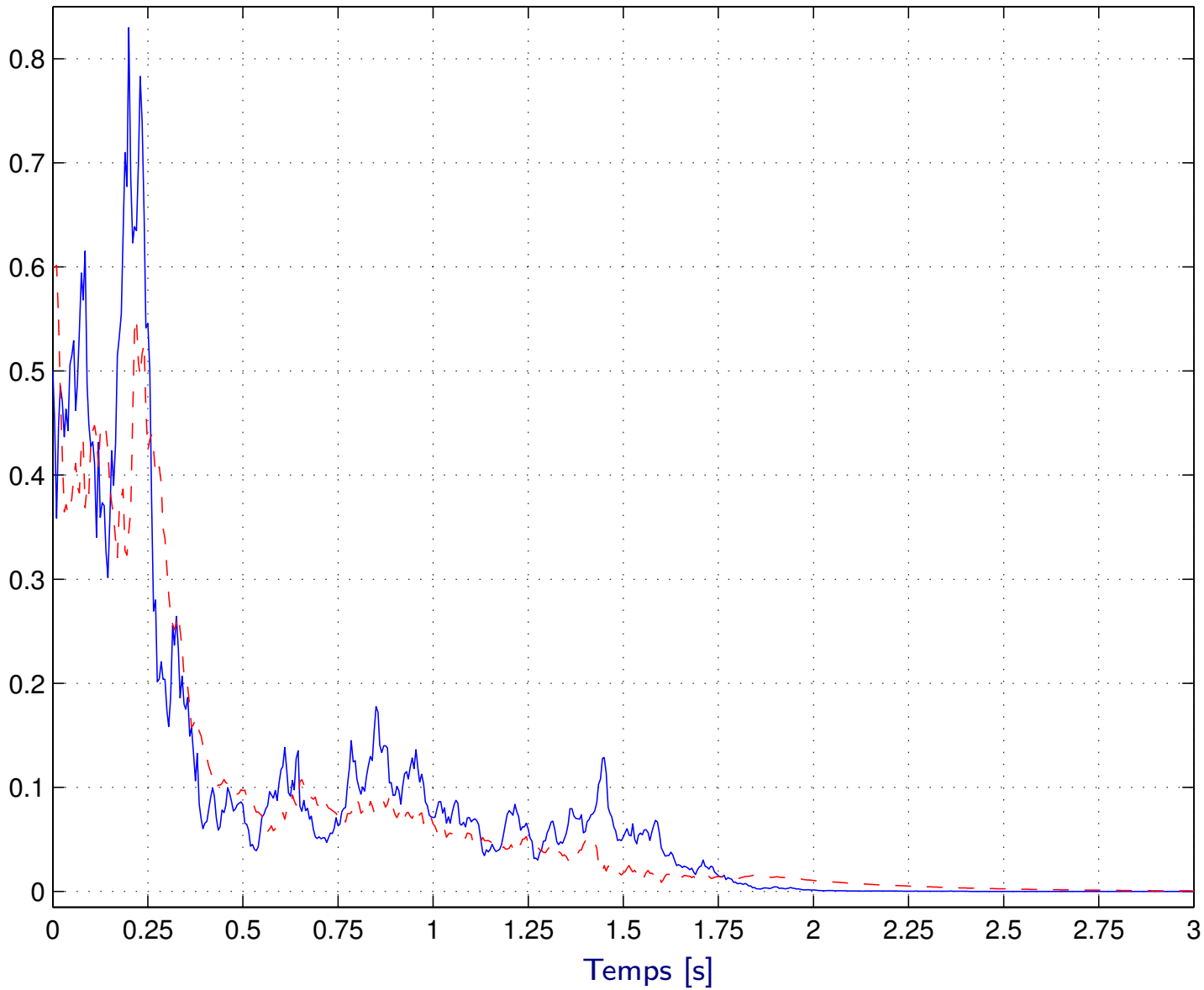


Fig.5 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu).



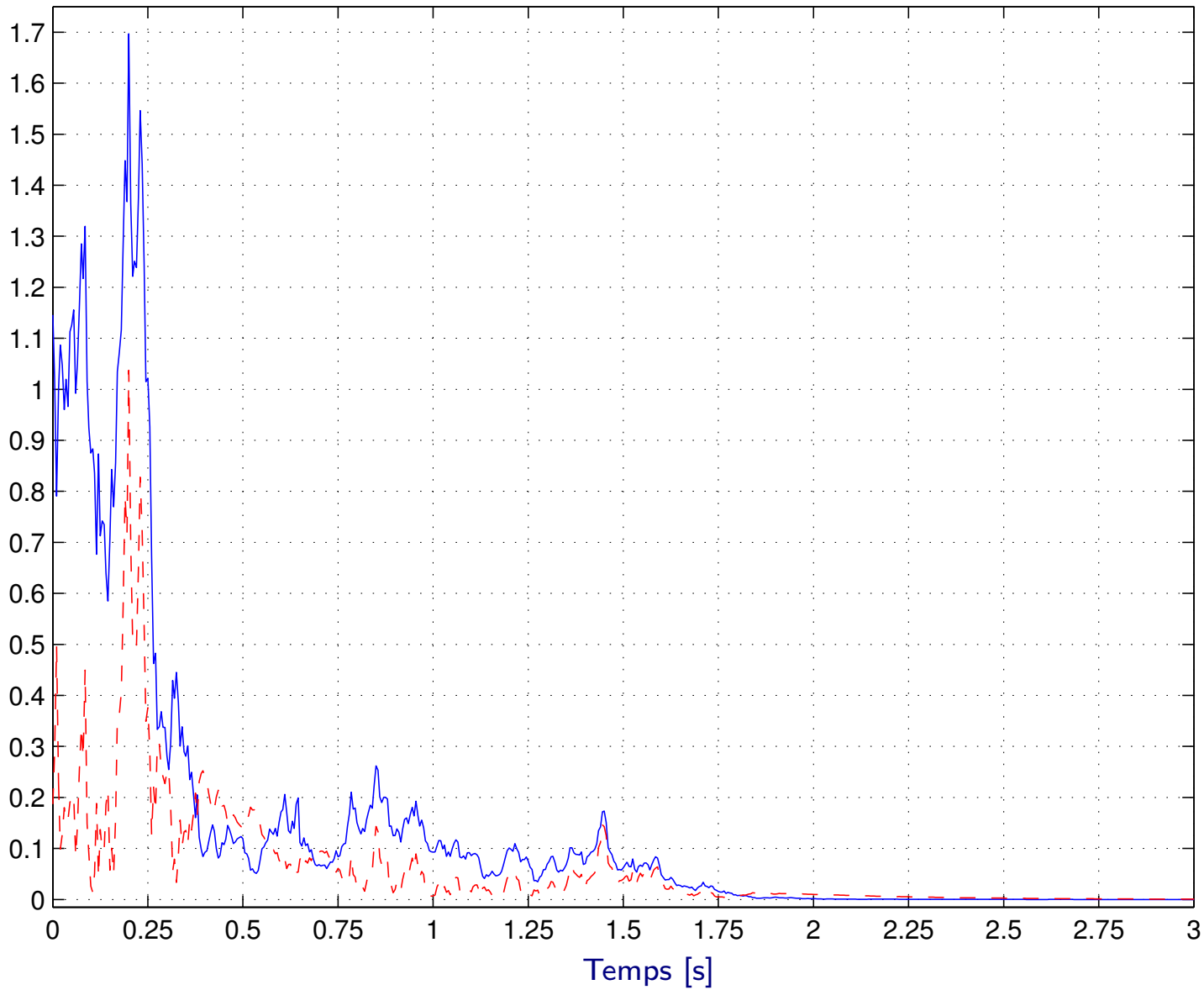


Fig.6 Norme de l'état $\|x(t)\|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $\|e(t)\|$ (rouge, discontinu).

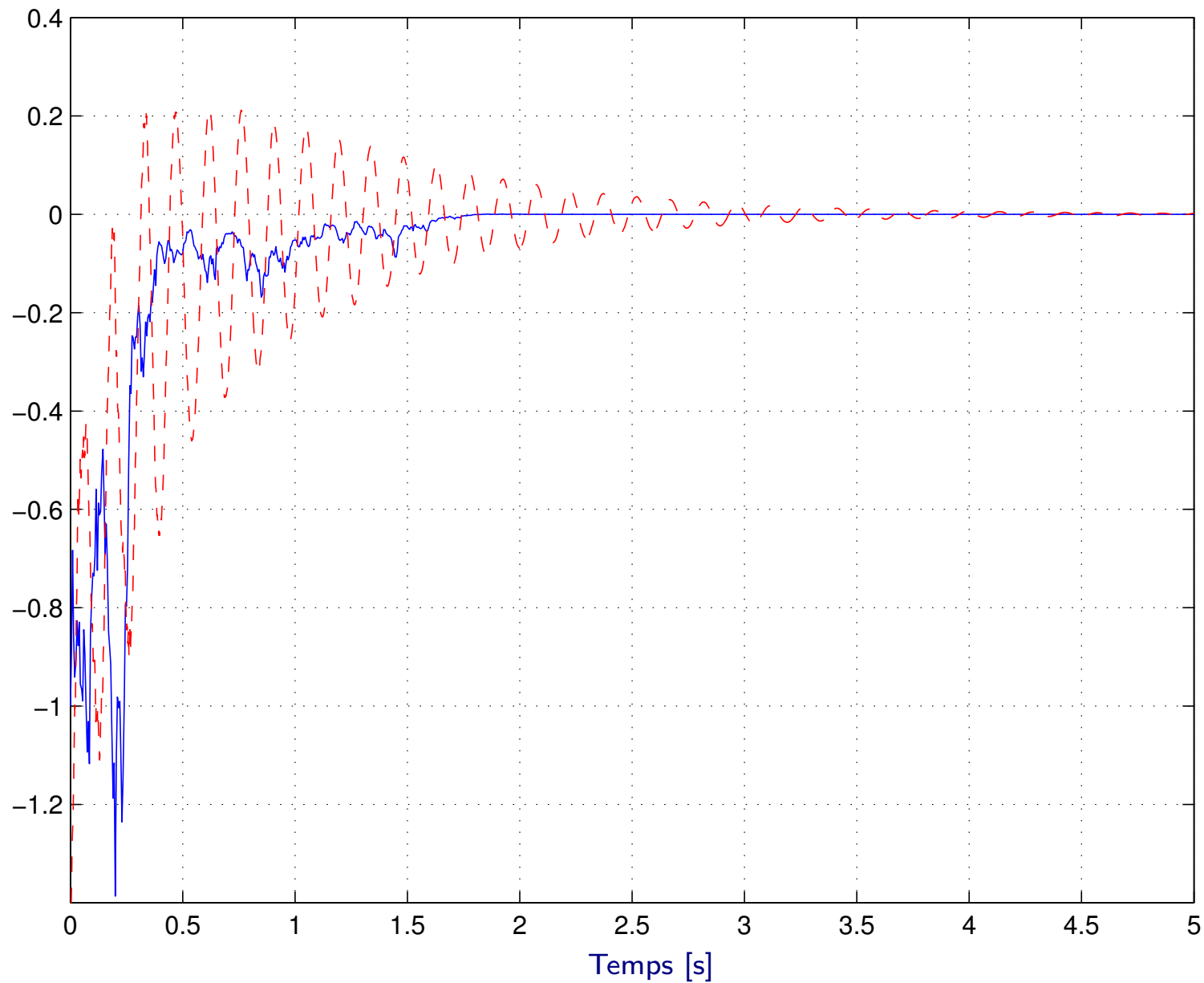


Fig.7 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_1(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynomiales (rouge, discontinu).



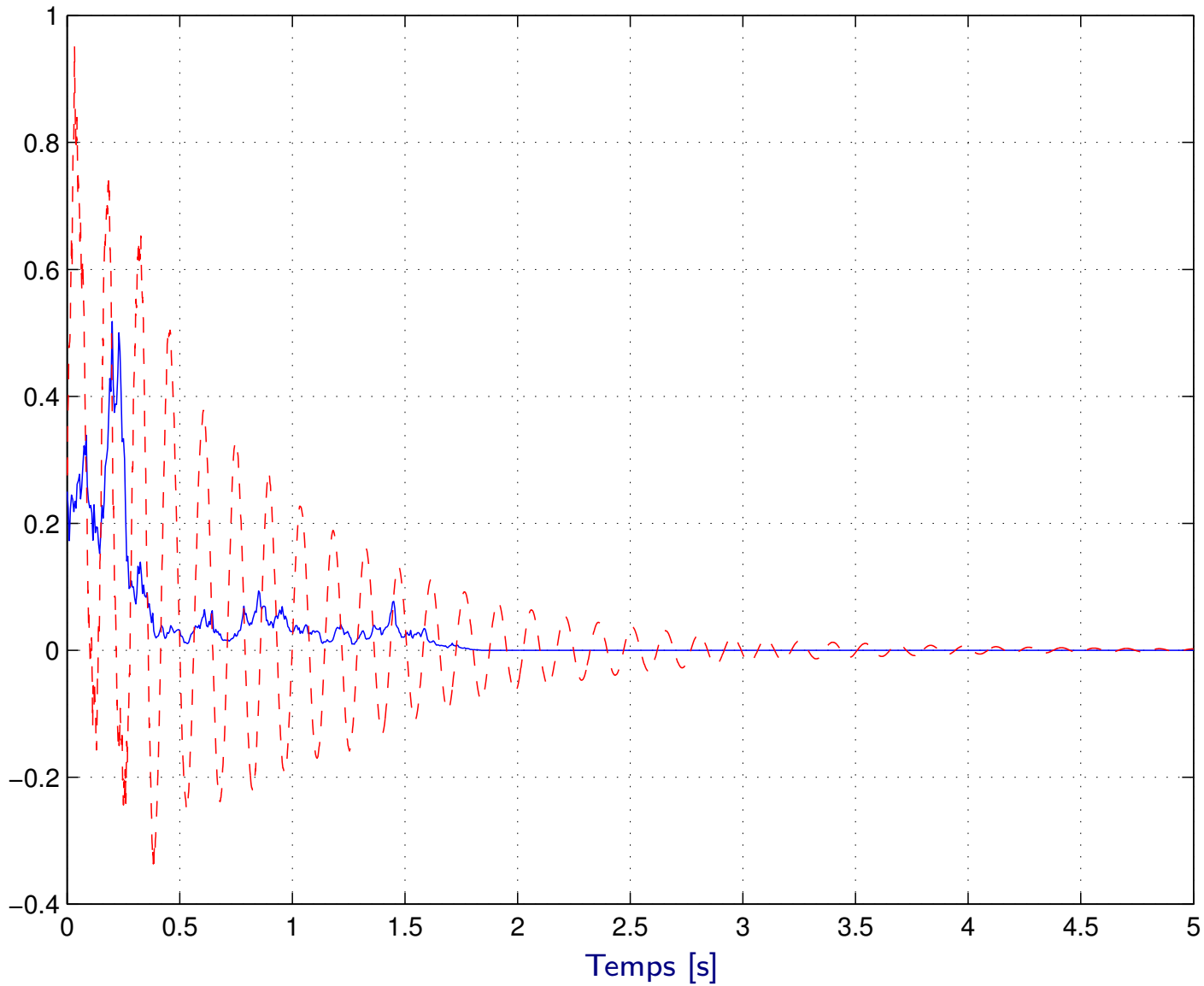


Fig.8 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_2(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynomiales (rouge, discontinu).



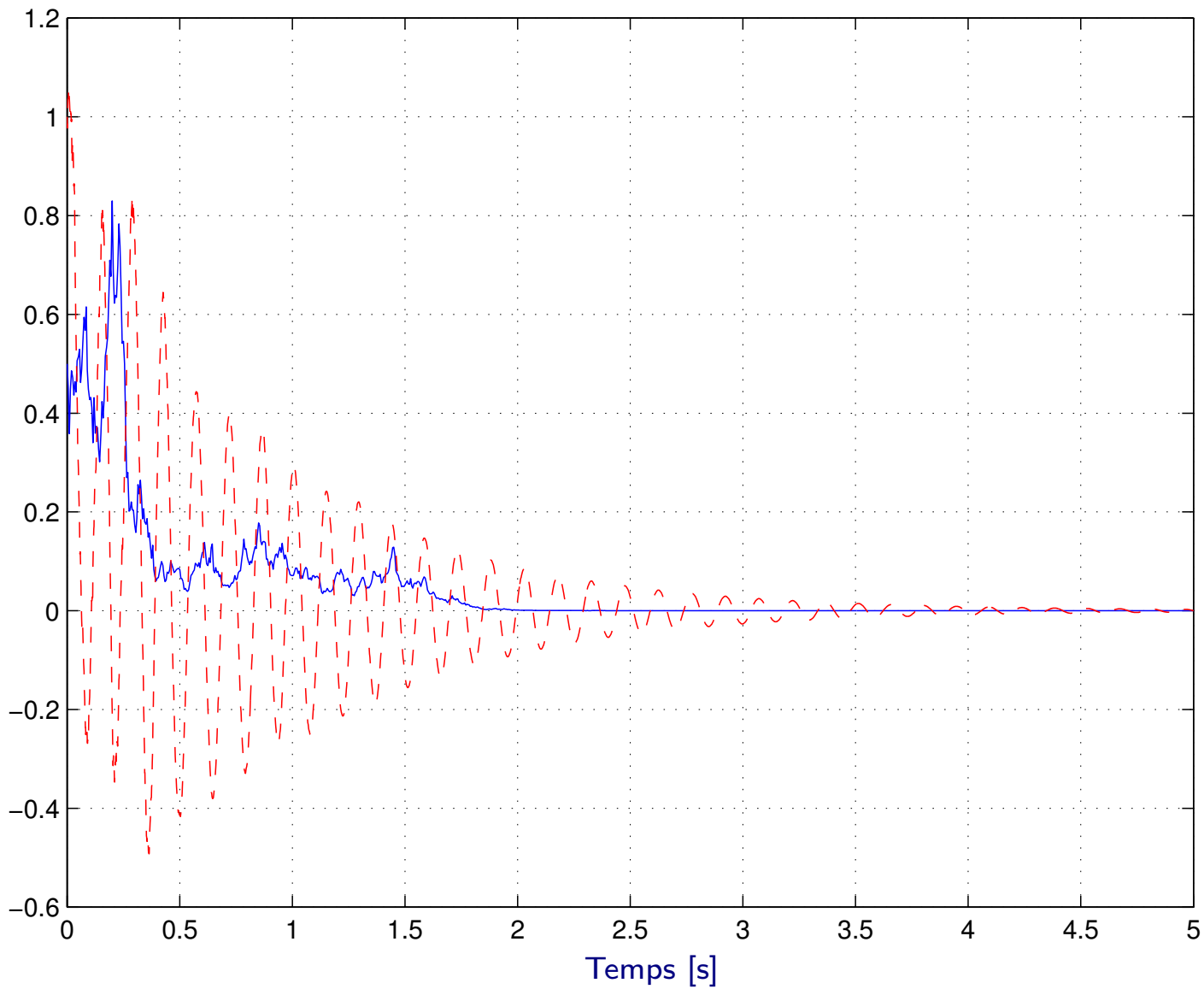


Fig.9 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\hat{x}_3(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynomiales (rouge, discontinu).



Merci pour votre attention

