

# Reconstruction de la vitesse de rotation d'un corps rigide à partir de mesures de directions (sans gyroscope)

NICOLAS PETIT

Centre Automatique et Systèmes, MINES ParisTech, PSL Research University

JAMACS'16  
15 novembre 2016



# Corps rigides en rotation



bowling



comète Chury



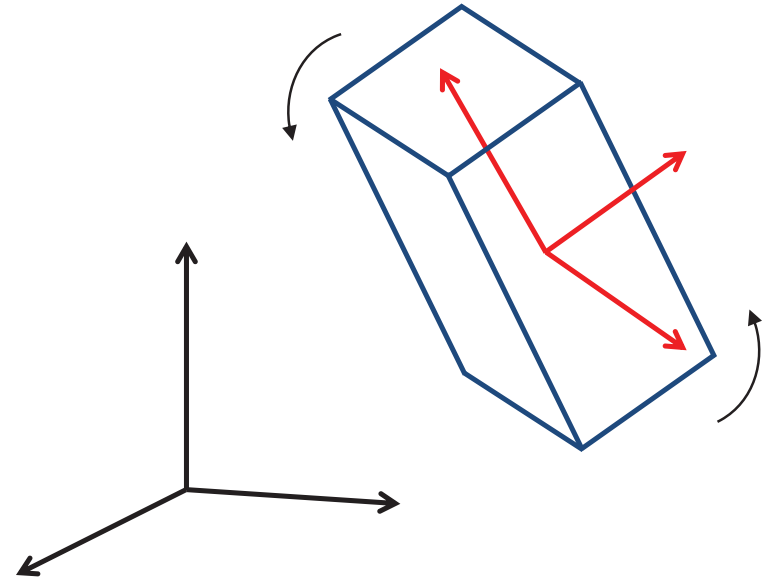
Véhicule Progress



Munition ISL

# Définition de la vitesse de rotation $\omega$

**Attitude** matrice de rotation  $R$  entre un référentiel fixe (inertiel) et un **référentiel engin**



$$R \in SO_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}R(t) = R(t)H(t), \quad H(t)^\top = -H(t)$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \triangleq [\omega(t)_\times], \quad \omega(t) \triangleq \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}$$

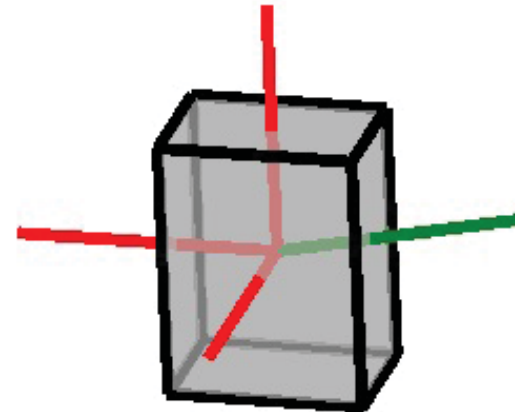
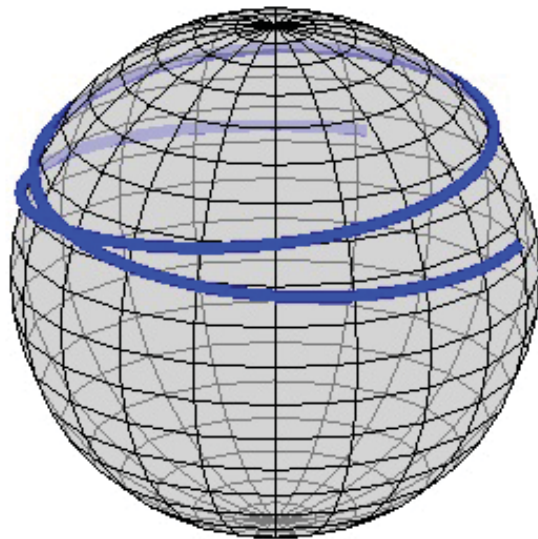
$\omega$  est la vitesse de rotation de  $R$  exprimée dans le référentiel engin (strapdown gyroscope)

# Capteurs de directions

Magnétomètres, accéléromètres, sondes d'intensité lumineuse

**Principe** mesure **vecteur de référence  $\mathbf{a}$**  dans un **référentiel engin**

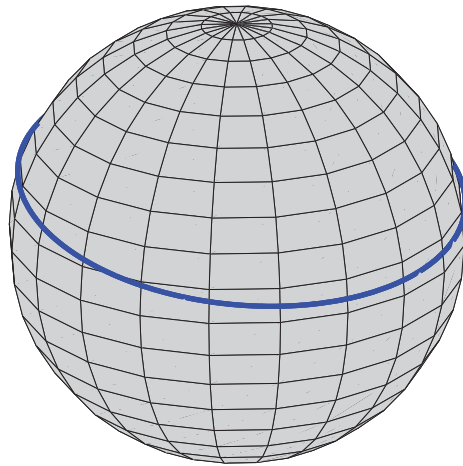
$$\mathbf{a}(t) \triangleq R(t)^\top \mathbf{a}, \quad \frac{d}{dt} R = R [\omega_\times]$$



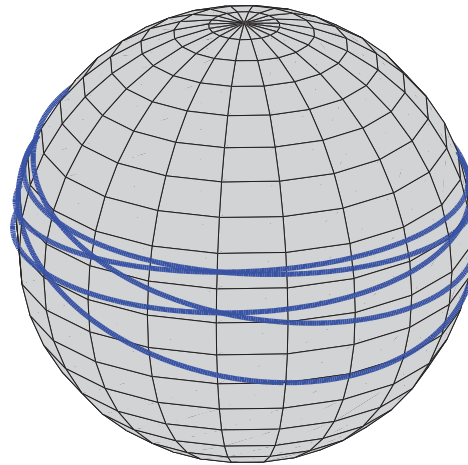
## Problème à résoudre

Estimer  $\omega$  à partir des mesures de direction

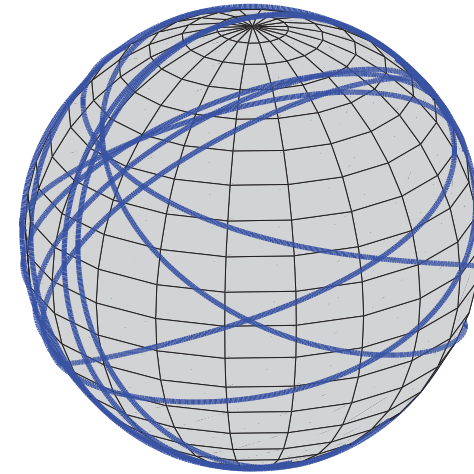
# Tracé des mesures au cours de la rotation



mono-axe

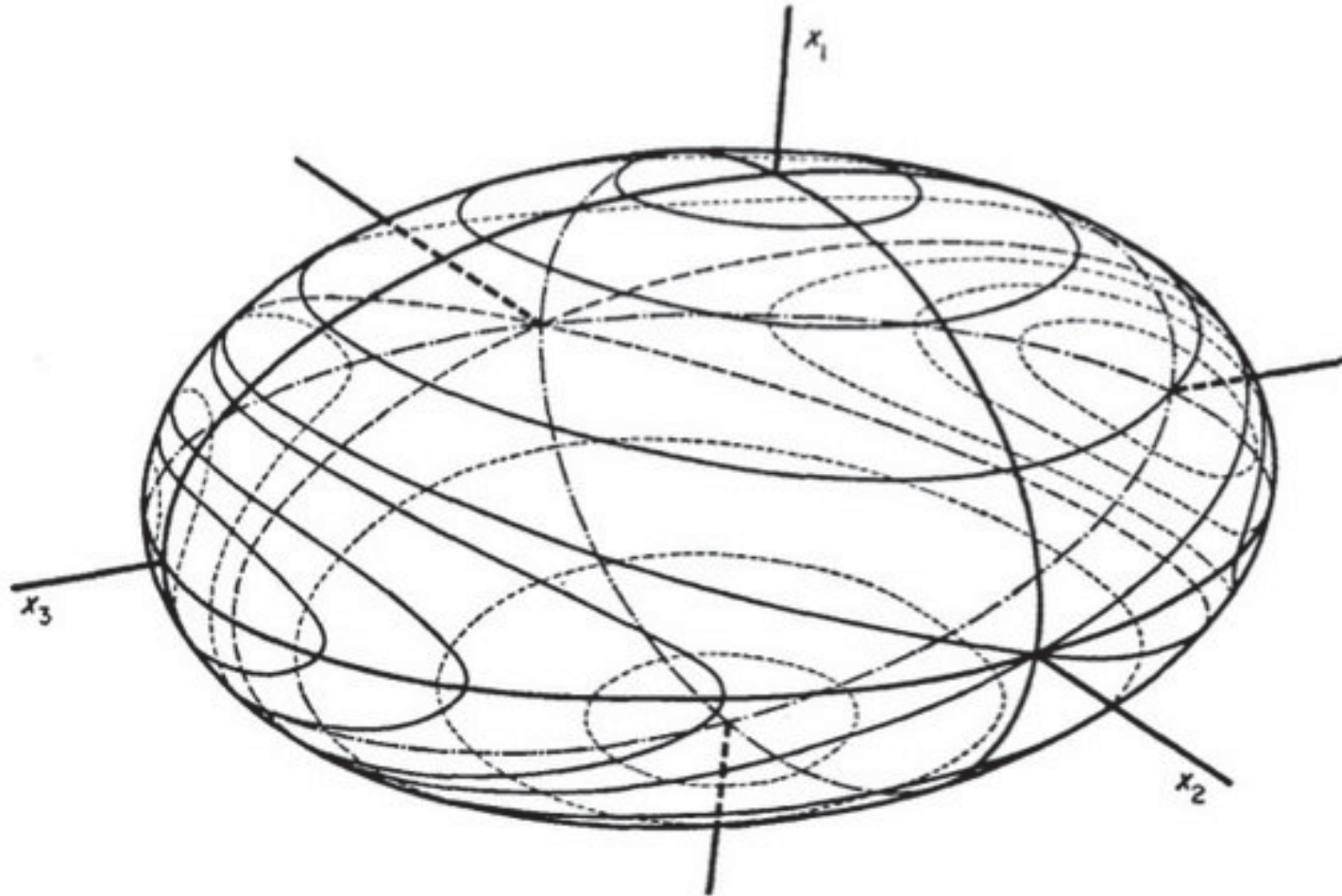


basculement



rotation générale

# Équations d'Euler (rotation libre)

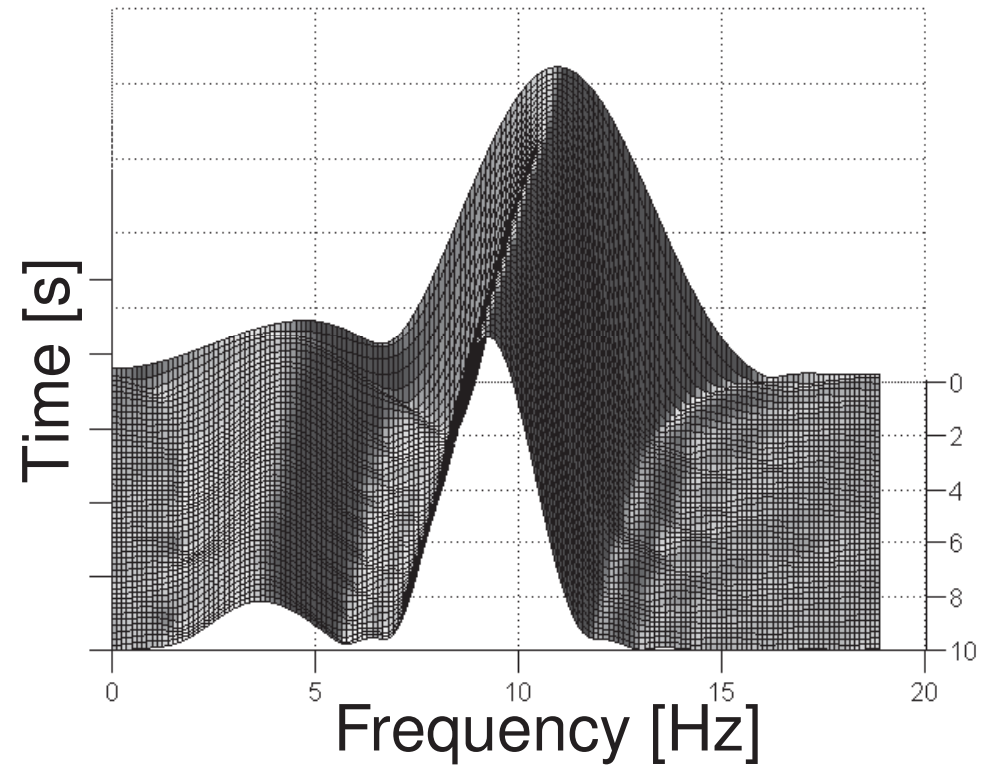
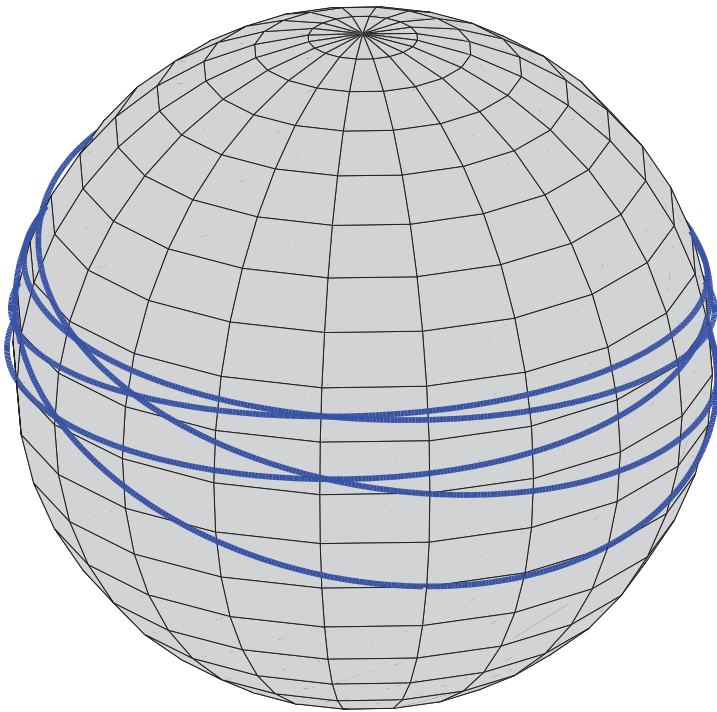


Landau, Lifchitz, Mécanique, 4ème éd., 1982

Cas non généraux



# Basculement de l'axe

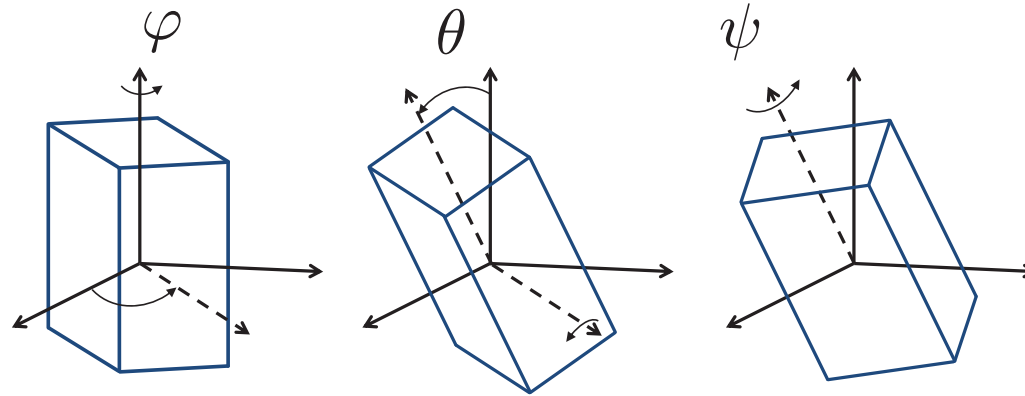


**Spectrogramme et détection de pics**



# Détection de pics

Angles d'Euler 'ZXZ'



Fréquences  $\dot{\varphi} + \dot{\psi}$ ,  $\dot{\psi}$

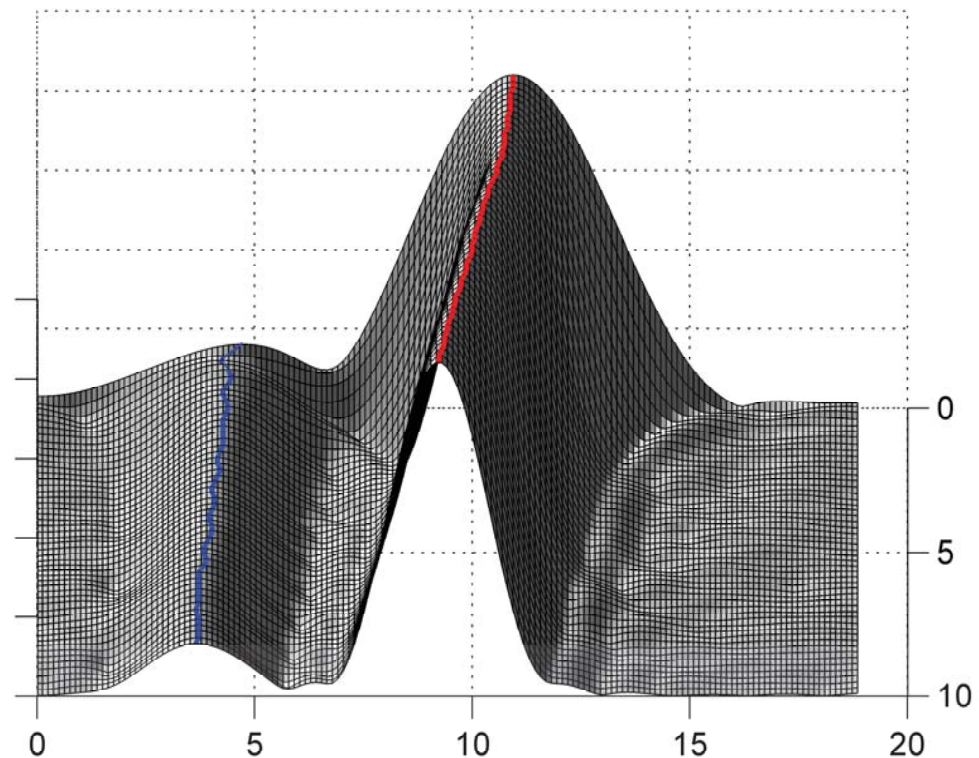
Amplitude  $\sin \theta + \varepsilon$

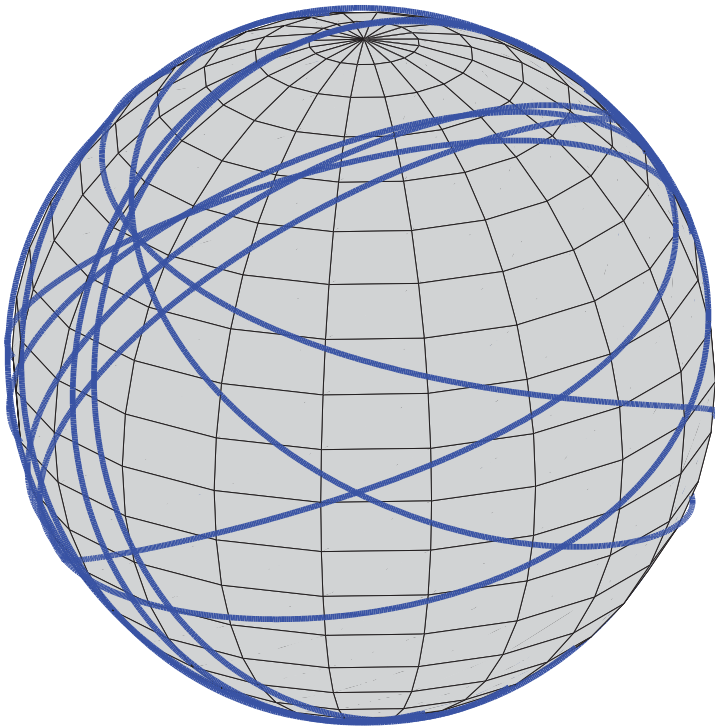
$$|\varepsilon| \leq s |\ddot{\theta}| + s^2 (|\ddot{\theta}| + |\ddot{\psi}|)$$

Séparation fréquentielle

$$s |\dot{\varphi}| \geq \text{seuil}^*$$

\*  $s$  : fenêtrage





## Mesures

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}$$

## Equations d'Euler

$$\mathbf{J} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

**Notation**  $E(\omega) \triangleq J^{-1}(J\omega \times \omega)$ ,  $\tau$  : couple extérieur

$$\frac{d}{dt}\omega = E(\omega) + J^{-1}\tau$$

## Problème général

À partir de 1 ou 2 mesures de direction  $a, b$

$$\frac{d}{dt}a = a \times \omega, \quad \frac{d}{dt}b = b \times \omega$$

estimer  $\omega$  solution de

$$\frac{d}{dt}\omega = E(\omega) + J^{-1}\tau$$

Cas de 2 mesures de direction

## État étendu

$$S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \omega \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt}S = \begin{pmatrix} a \times \omega \\ b \times \omega \\ E(\omega) + J^{-1}\tau \end{pmatrix}$$

## Observateur

$$\frac{d}{dt}\hat{S} = \begin{pmatrix} a \times \hat{\omega} + k(a - \hat{a}) \\ b \times \hat{\omega} + k(b - \hat{b}) \\ E(\hat{\omega}) + J^{-1}\tau + k^2(a \times \hat{a} + b \times \hat{b}) \end{pmatrix}, \quad k > 0$$

# Equation d'erreur : $\tilde{S} \triangleq S - \hat{S}$

$$\dot{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} -kl & 0 & [a_x] \\ 0 & -kl & [b_x] \\ k^2 [a_x] & k^2 [b_x] & 0 \end{pmatrix} \tilde{S} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(\omega) - E(\hat{\omega}) \end{pmatrix}$$

## Proposition

Pour  $k$  suffisamment grand, 0 est équilibre **localement exponentiellement stable**. Son **bassin d'attraction** contient

$$\left\{ \tilde{S}(t_0) \text{ t.q. } |\tilde{a}(t_0)|^2 + |\tilde{b}(t_0)|^2 + \frac{1}{k} |\tilde{\omega}(t_0)|^2 \leq C \right\}$$

avec  $C > 0$

$p \triangleq a(t)^T b(t) = a(t_0)^T b(t_0) \neq 0$ ,  $\omega$  borné

L. Magnis, N. Petit, Automatica 2016



# Preuve : changement de variables

$$X \triangleq \begin{pmatrix} a - \hat{a} \\ b - \hat{b} \\ \frac{\omega - \hat{\omega}}{k} \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}X = k \underbrace{\begin{pmatrix} -I & 0 & [a_{\times}] \\ 0 & -I & [b_{\times}] \\ [a_{\times}] & [b_{\times}] & 0 \end{pmatrix}}_{\triangleq A(t)} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E(\omega) - E(\hat{\omega})}{k} \end{pmatrix}}_{\triangleq \xi}$$

**Analyse d'un système LTV perturbé**

$$\frac{d}{dt}X = kA(t)X + \xi$$

$E(\cdot)$  est quadratique

$$|\xi| = \frac{1}{k} |E(\omega) - E(\hat{\omega})| = \frac{1}{k} \left| J^{-1} (J\tilde{\omega} \times \omega + J\omega \times \tilde{\omega} - J\tilde{\omega} \times \tilde{\omega}) \right|$$

**Borne sur  $\xi$**

$$|\xi| \leq \sqrt{2}\omega_{\max}|X| + k|X|^2$$

# Analyse du système non perturbé $\frac{d}{dt}X = kA(t)X$

- $\forall t, s, \quad \left\| e^{kA(t)s} \right\| \leq \sqrt{3}e^{-\frac{ks}{2}}$  (chaque  $A(t)$  uniformément ES)
- $\forall t, \quad \left\| k\dot{A}(t) \right\| \leq k\sqrt{2}\omega_{\max}$  ( $A$  Lipschitz)

Hill & Ilchmann [2011] *Journal of Numerical Analysis*

**Le système LTV est exponentiellement stable**

$$|X(t)| \leq \sqrt{3}e^{-\frac{k}{3}(t-t_0)}|X(t_0)|, \quad \forall k \geq k_{\text{threshold}}$$

**Matrice de transition  $\phi$**

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq \sqrt{3}e^{-\frac{k}{3}(t-t_0)}$$

Soit le système LTV

$$\dot{Z} = M(t)Z$$

tel que

- $M(\cdot)$  est  $l$ -Lipschitz, avec  $l > 0$ ,
- il existe  $K \geq 1$ ,  $c \geq 0$  tel que pour tout  $t$  et tout  $s \geq 0$ ,  
 $\|e^{M(t)s}\| \leq Ke^{-cs}$  (stabilité exponentielle à temps bloqué).

Alors, pour tout  $t_0$ ,  $Z_0$ , la solution de  $\dot{Z} = M(t)Z$  avec c.i.  $Z(t_0) = Z_0$  vérifie, pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$|Z(t)| \leq Ke^{(\sqrt{Kl \ln K} - c)(t - t_0)} |Z_0|$$

# Étude de $A(t)$

$$A(t) \triangleq \begin{pmatrix} -I & 0 & \begin{bmatrix} a(t)_{\times} \\ b(t)_{\times} \end{bmatrix} \\ 0 & -I & \begin{bmatrix} a(t)_{\times} \\ b(t)_{\times} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a(t)_{\times} \\ b(t)_{\times} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a(t)_{\times} \\ b(t)_{\times} \end{bmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

satisfait

$$P^{-1}(t)A(t)P(t) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = -I, \quad M_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{\alpha_i - 1} \\ \sqrt{\alpha_i - 1} & -1 \end{pmatrix} < -I/2$$

Ce qui donne

$$\|e^{A(t)s}\| \leq \|P(t)\| \|P(t)^{-1}\| e^{-\frac{1}{2}s} \triangleq Ke^{-\frac{1}{2}s}$$

$$\text{eig}(P^T P) = \left\{ 1, 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{1+p}}, 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{1-p}} \right\}$$

## Matrice de transition $\phi$

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq \sqrt{3}e^{-\frac{k}{3}(t-t_0)}$$



## Fonction de Lyapounov

$$V(t, X) = kX^T \int_t^{+\infty} \phi(s, t)^T \phi(s, t) ds X$$

## Propriétés

- $\frac{1}{2\sqrt{2}}|X|^2 \leq V(t, X) \leq \frac{9}{2}|X|^2$
- $|\nabla V(t, X)| \leq 9|X|$

## Variation le long des trajectoires

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, X) &= -k|X|^2 + \nabla V(t, X)^T \xi \\ &\leq -k|X|^2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{2}\omega_{\max}}{k} + 9|X| \right) \end{aligned}$$

car  $|\xi| \leq \sqrt{2}\omega_{\max}|X| + k|X|^2$

## Stabilité exponentielle

### Convergence

$$|X(t)| \leq \sqrt{9\sqrt{2}} e^{-c(t-t_0)} |X(t_0)|, \quad c \triangleq \frac{k}{18} - \frac{\omega_{\max}}{\sqrt{2}}$$

### Bassin d'attraction

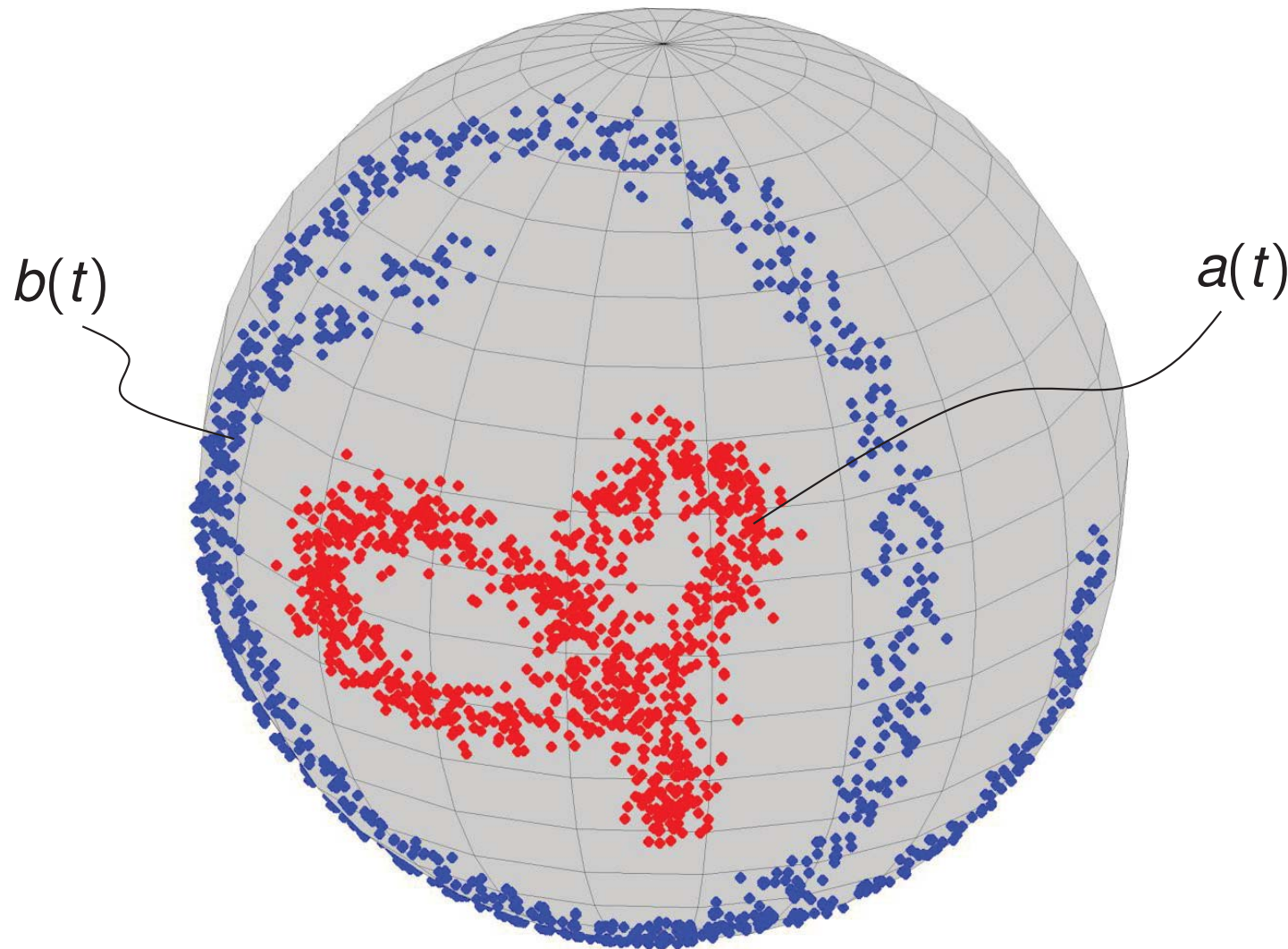
$$|X(t_0)| \leq \frac{1}{18} \left( 1 - \frac{9\sqrt{2}\omega_{\max}}{k} \right) \sqrt{\frac{1}{9\sqrt{2}}}$$

**Note** la vitesse de convergence croît vers  $+\infty$  avec  $k$

# Simulation : mesures

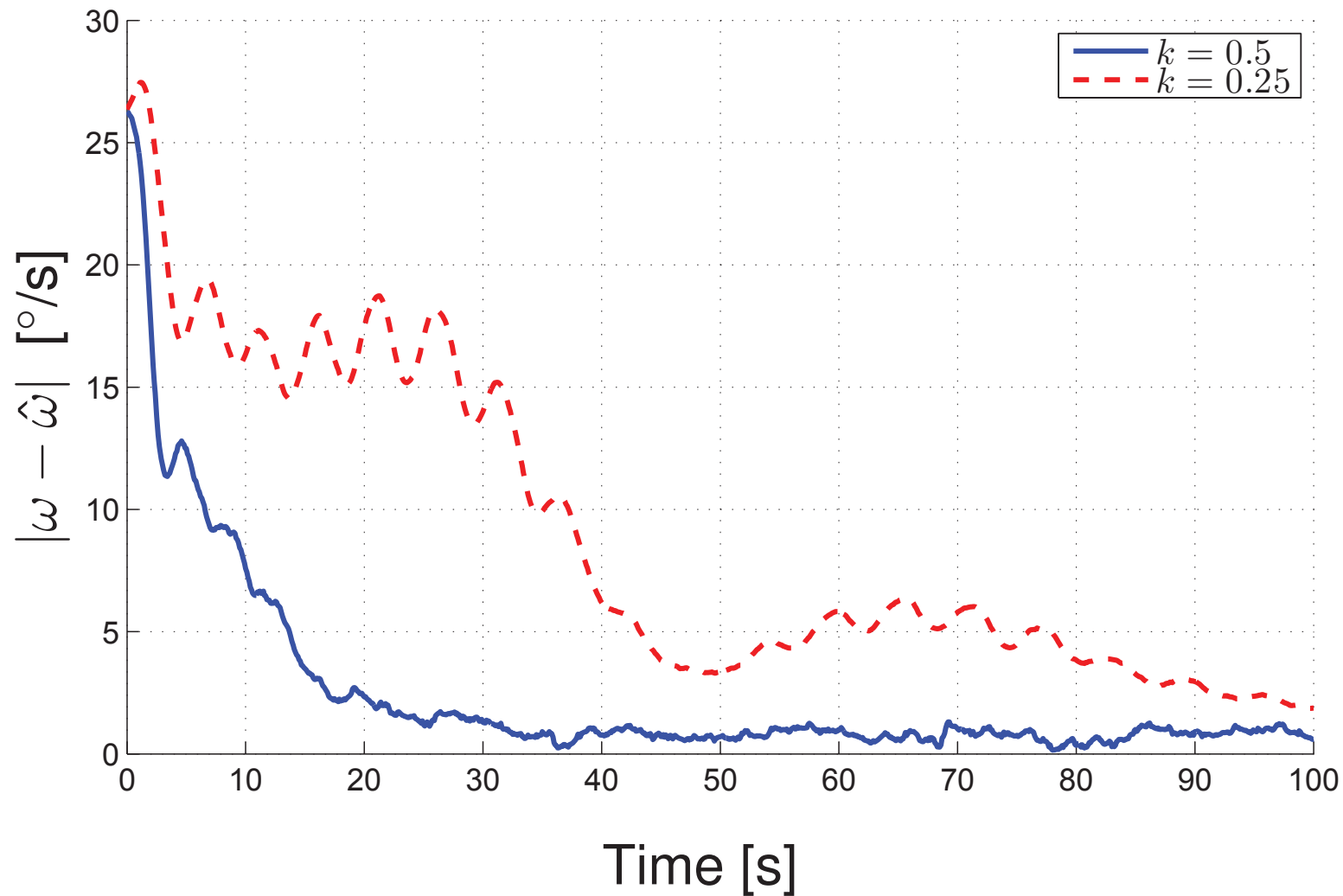
20 cm × 10 cm × 10 cm Cubesat (2 kg, homogène)

**Mesures** (échantillonnage 0.1 s)

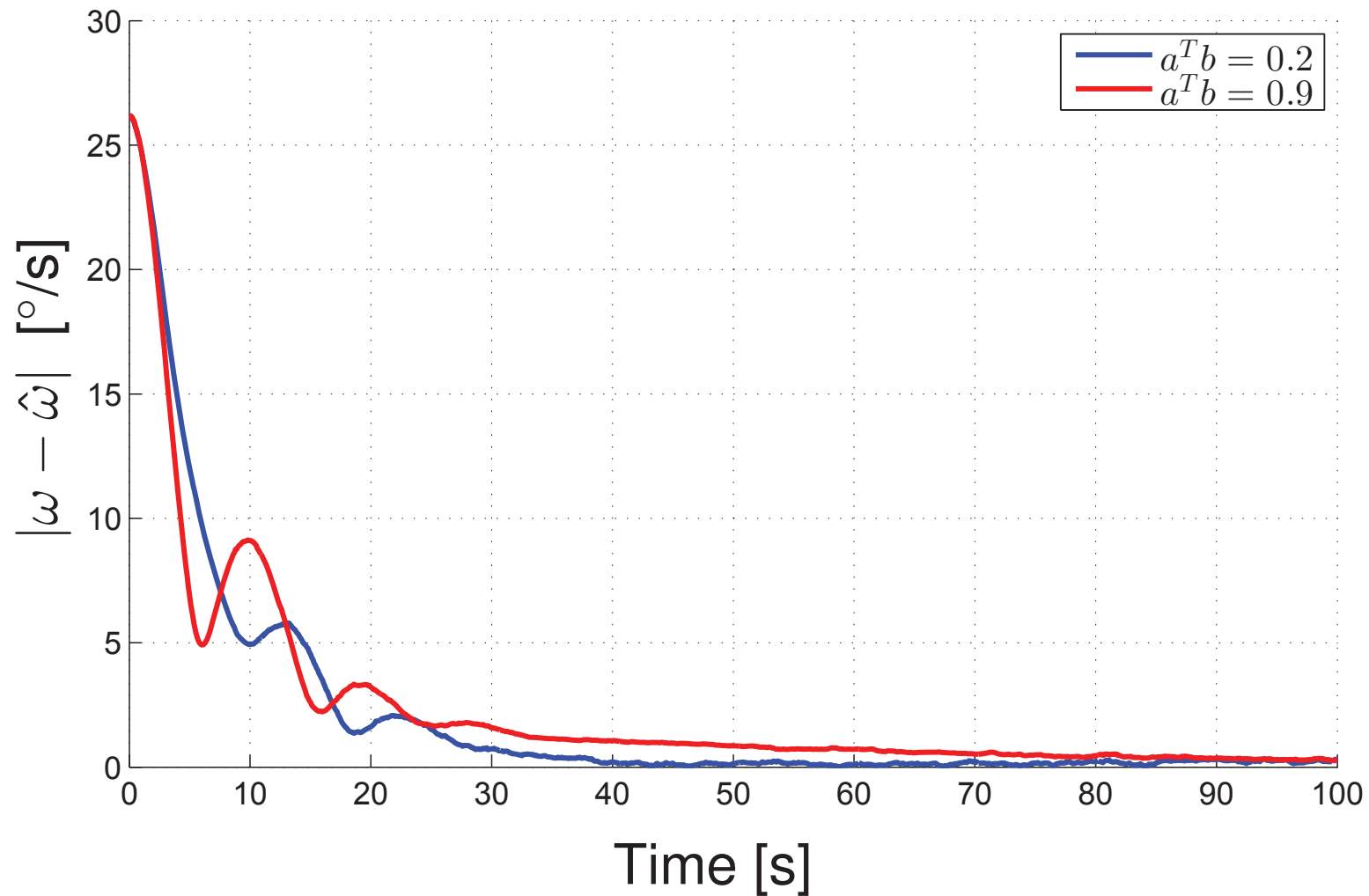


# Influence de $k$

$$\omega_{\max} = 62 \text{ [}^\circ\text{/s]}$$



# Influence de l'indépendance de $a, b$



Cas d'une unique mesure



$$\frac{d}{dt} \hat{S} = \begin{pmatrix} a \times \hat{\omega} + k(a - \hat{a}) \\ E(\hat{\omega}) + J^{-1} \tau + k^2 a \times \hat{a} \end{pmatrix}$$

**Ce qui est conservé** changement de variable, système LTV perturbé, borne de la perturbation

**Ce qui change**

$$A(t) = \begin{pmatrix} -I & [a(t)]_{\times} \\ [a(t)]_{\times} & 0 \end{pmatrix}$$

possède maintenant une valeur propre 0 : **perte de la stabilité exponentielle ponctuelle**

## Hypothèse d'excitation persistante (PE)

$$\exists T, \mu > 0, \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [a(s)_x]^\top [a(s)_x] ds \geq \mu I, \quad \forall t$$

**Systeme LTV est exponentiellement stable** grâce à PE

Morgan & Narendra [1977] *J. of Control and Optimization*

**Systeme complet est exponentiellement stable** analyse de Lyapunov

**Mais** pas de maîtrise de la vitesse de convergence

Décroissance non stricte

$$\frac{d}{dt}|Z|^2 = -2k|CZ|^2 \leq 0$$

avec

$$C \triangleq (\sqrt{2k} \quad 0)$$

$$W(t, t + T) \triangleq \int_t^{t+T} \phi(\tau, t)^\top C^\top C \phi(\tau, t) d\tau$$

est le Grammien d'observabilité de  $(kA(\cdot), C)$  et  $\phi$  la matrice de transition de  $kA(\cdot)$ . On devrait démontrer qu'il est strictement positif.

Pour démontrer qu'il est strictement positif, on considère celui *après injection de sortie* de  $(M(t) \triangleq kA(\cdot) + K(t)C, C)$ , avec

$$K(t) \triangleq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I \\ -[a(t)_{\times}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(t) &\triangleq kA(t) + K(t)C \\ &= \begin{pmatrix} 0 & k[a(t)_{\times}] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

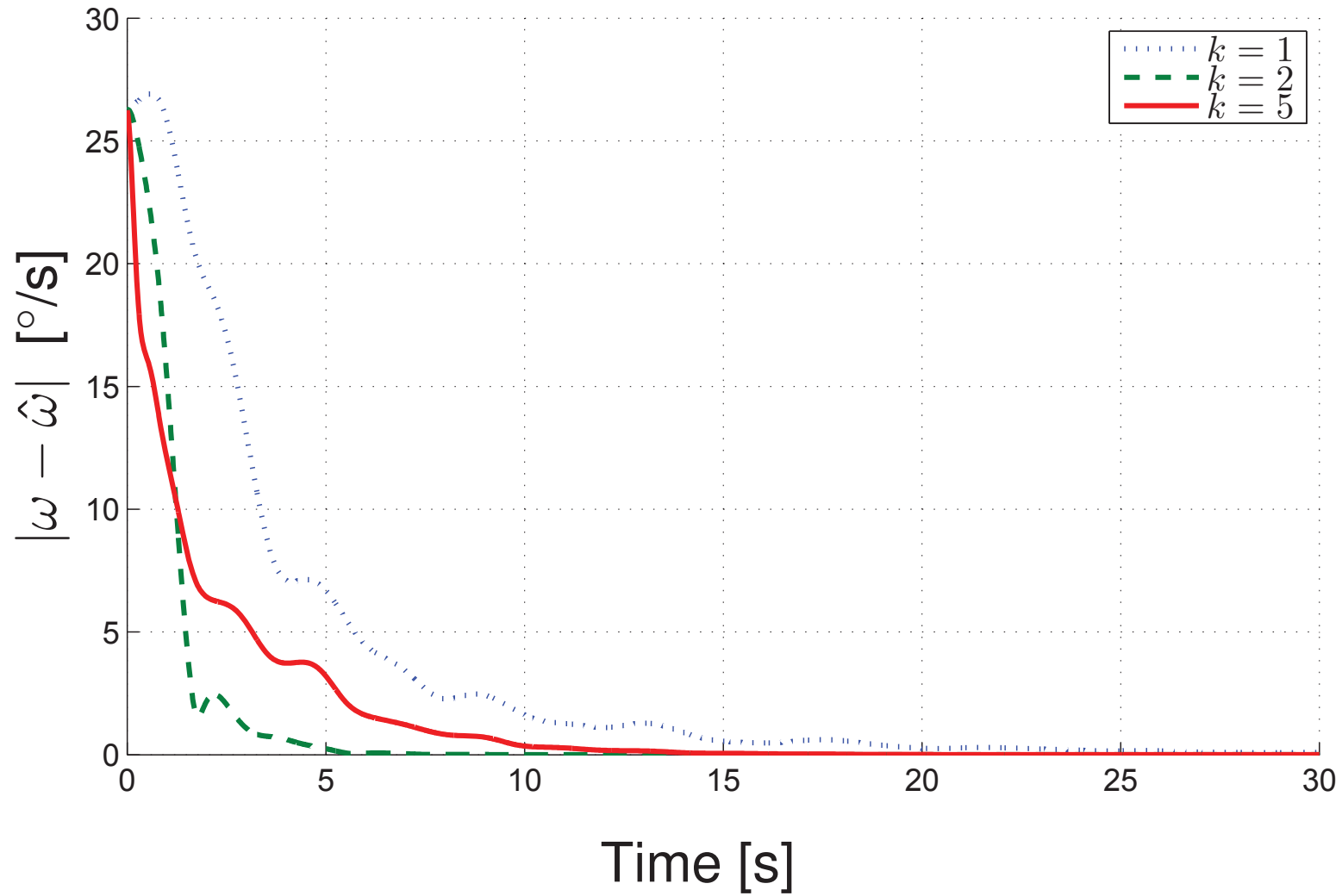
$$\widetilde{W}(t, t+T) = 2k \int_t^{t+T} \begin{pmatrix} I & A(\tau, t) \\ \mathcal{A}(\tau, t)^{\top} & \mathcal{A}(\tau, t)^{\top} A(\tau, t) \end{pmatrix} d\tau$$

avec

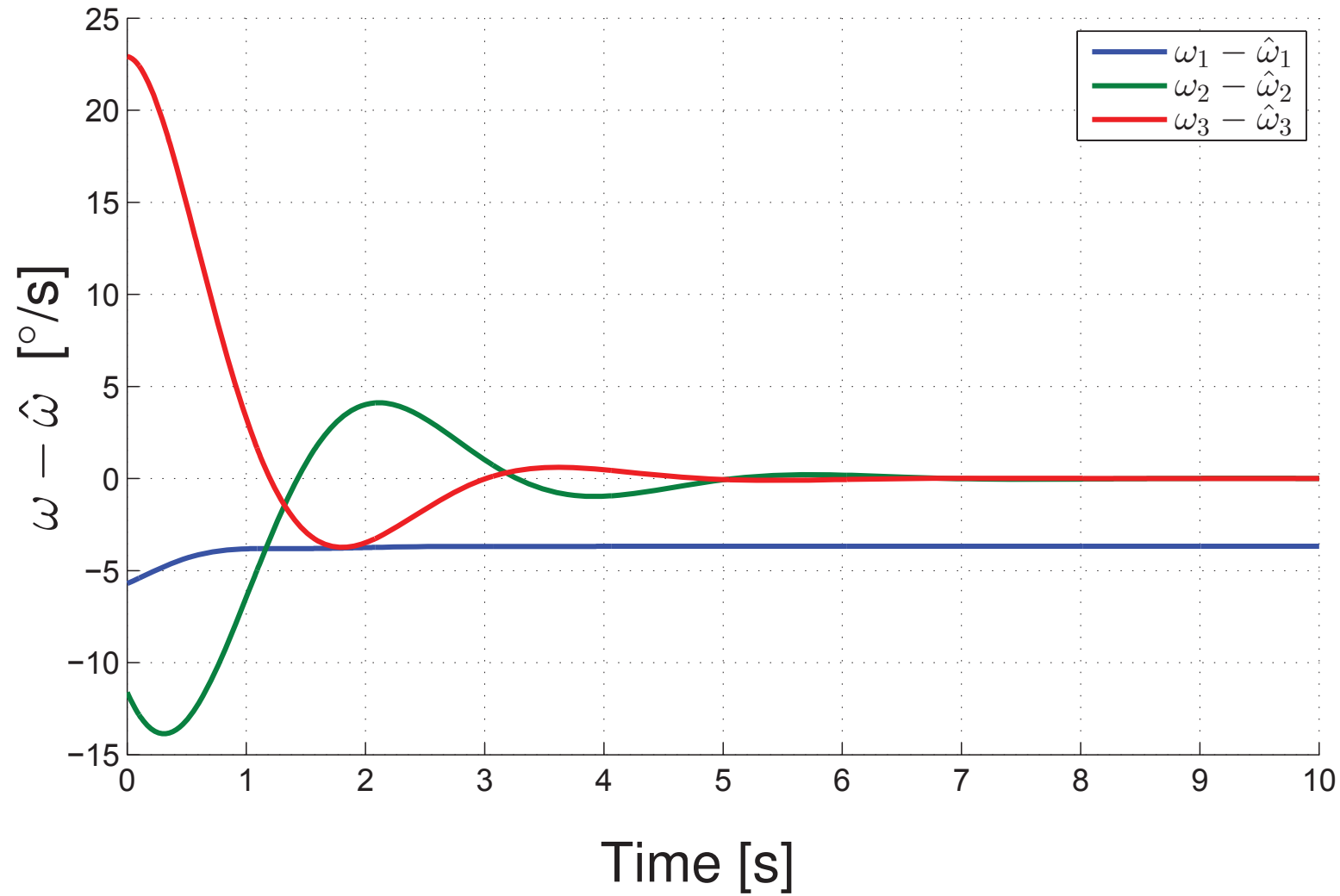
$$\mathcal{A}(\tau, t) \triangleq k \int_t^{\tau} [a(u)_{\times}] du$$

PE donne la conclusion

# Si PE est satisfaite



# Si PE n'est pas satisfaite





## Analyse de la propriété PE en rotation libre

# Problème

**Rotation libre**  $J \frac{d}{dt} \omega = J \omega \times \omega$

**Moment cinétique**  $\mathbf{M} \triangleq R J \omega$  est constant

## Question

Trouver des conditions sur  $R(t_0), \omega(t_0)$  garantissant la propriété PE

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [a(s)_\times]^\top [a(s)_\times] ds \geq \mu I, \quad \forall t$$

avec  $T > 0$  et  $\mu \in (0, 1)$

## Formulation équivalente

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^\top a(s))^2 ds \leq 1 - \mu, \quad \forall t, \quad \forall |x| = 1$$

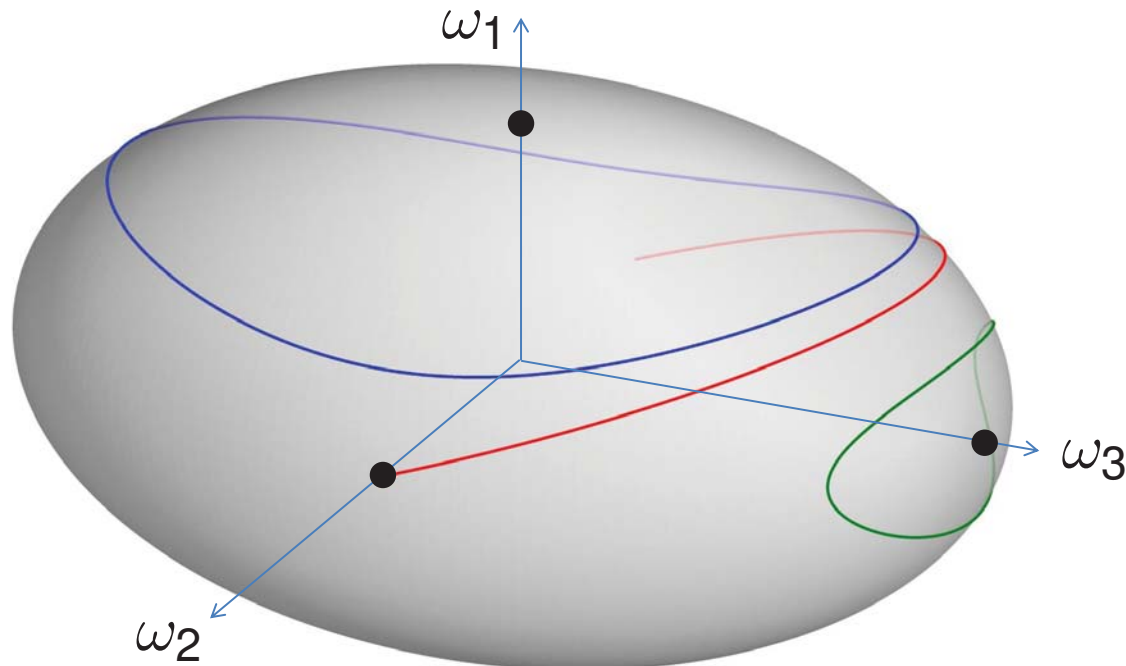
# 4 différents types de $\omega$ (Jacobi)

## Moments d'inertie distincts. $\omega$ est

- **constant**, ssi  $\omega(t_0)$  vecteur propre de  $J$
- **singulier**, ssi

$$\frac{J_1 - J_2}{J_3} |\omega_1(t_0)|^2 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} |\omega_3(t_0)|^2$$

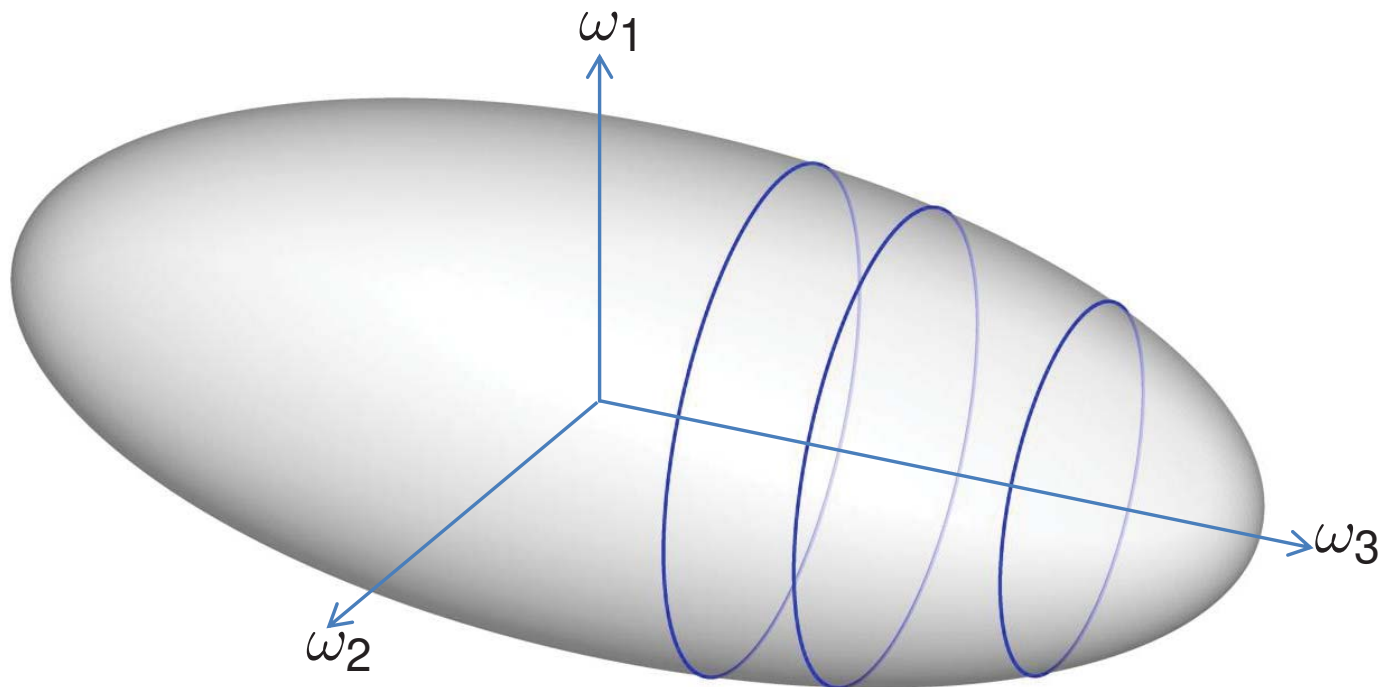
- sinon :  $\omega$  est périodique non-planaire **LAM** où **SAM**



# 4 différents types de $\omega$

## Deux moments d'inertie égaux. $\omega$ est

- constant, ssi  $\omega(t_0)$  vecteur propre de  $J$
- sinon, périodique planaire



# Propriété PE dans les cas $\omega$ constant ou singulier

$\omega$  **Constant, M aligné avec a**

$$a = R(t_0)^T \mathbf{a}$$

mesures constantes, PE n'est pas satisfaite

$\omega$  **Constant, M non aligné avec a**

$$\frac{d}{dt} a = a \times \omega$$

a périodique non constant, PE est vérifiée

$\omega$  **Singulier**  $\omega(t)$  a une limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , conclusions identiques

L. Magnis, N. Petit, IEEE Tr. Autom. Control, 2016

## Théorème : propriété PE est presque toujours satisfaite

La propriété PE est vérifiée sauf si les 2 conditions suivantes sont vérifiées

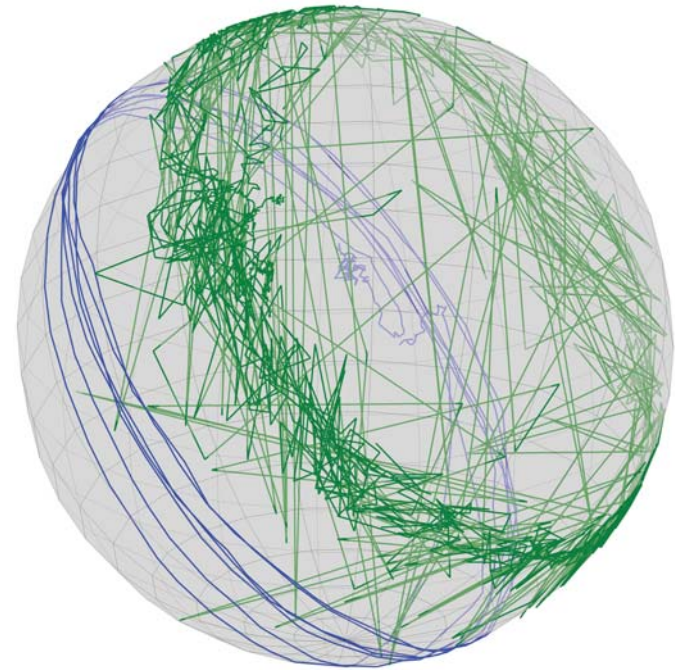
- $\omega$  est constant ( $\omega(t_0)$  vecteur propre de  $J$ ) ou singulier  
i.e.

$$\frac{J_1 - J_2}{J_3} |\omega_1(t_0)|^2 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} |\omega_3(t_0)|^2$$

- $R(t_0)J\omega(t_0)$  est aligné avec  $\mathbf{a}$  (moment cinétique aligné avec  $\mathbf{a}$ )

# Expérimentations

# Avec un smart-phone





# Tests

