

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables - Application au moteur asynchrone ^a

M. Farza, M. M'Saad

Université de Caen, ENSICAEN

6 Bd Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, France.

^aVendredi 9 Février 2018- Journée Observation & Systèmes complexes, CNAM, Paris

Formulation du problème

- Classe des systèmes non linéaires difféomorphes à

$$\begin{cases} \dot{x} = F(u, x, \rho)x + \Psi(u, x, \rho)\rho + g(u, x, \rho) + \varepsilon(t), \\ y = C(u)x + \Psi^{(0)}(u)\rho = F_0(u)x^{(1)} + \Psi^{(0)}(u)\rho, \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(k)} \\ \vdots \\ x^{(q)} \end{pmatrix}; \quad x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k} \text{ et } \sum_{k=1}^q n_k = n; \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_j \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; \quad \rho_j \in \mathbb{R},$$

$$F(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} 0 & F_1(u, x^{(1)}, \rho) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & F_2(u, x^{(1)}, x^{(2)}, \rho) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F_{q-1}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}, \rho) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(u) = \begin{pmatrix} F_0(u) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$F_0(u)$: matrice non nulle $n_0 \times n_1$ avec $n_0 = n_1 = p$,

$F_k(u, x, \rho)$: matrice non nulle $n_k \times n_{k+1}$, $k = 1, \dots, q - 1$.

$$\Psi(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)}(u, x^{(1)}, \rho) \\ \vdots \\ \Psi^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho) \\ \vdots \\ \Psi^{(q)}(u, x, \rho) \end{pmatrix}, \quad g(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(u, x^{(1)}, \rho) \\ \vdots \\ g^{(k)}(u, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \rho) \\ \vdots \\ g^{(q)}(u, x, \rho) \end{pmatrix},$$

- $\Psi^{(0)}(u) = \left[\Psi_1^{(0)}(u) \dots \Psi_m^{(0)}(u) \right] \in \mathbb{R}^{p \times m}$,
- $\Psi(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
- $\Psi^{(k)}(u, x, \rho) = \left[\Psi_1^{(k)}(u) \dots \Psi_m^{(k)}(u, x, \rho) \right] \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$, $k = 1, \dots, q$,
- $\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $j = 1, \dots, m$,
- $g^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$.
- $\varepsilon : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \varepsilon^{(q)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, avec $\varepsilon^{(k)} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$,

fonctions inconnues (incertitudes sur le système)

Objectif et préliminaires

- **Objectif:** Estimation simultanée de l'état du système (x) et des paramètres inconnus (ρ).
- **Notion d'indices caractéristiques:**

A chaque paramètre inconnu ρ_j , $j = 1, \dots, m$, on associe un indice caractéristique, $\bar{\nu}_j$, défini comme suit:

$$\bar{\nu}_j = \min \left\{ k \in \{0, \dots, q\} / \Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \neq 0 \right\}.$$

Soit $1 \leq r \leq m$ le nombre d'indices caractéristiques différents qui sont renommés et réordonnés comme suit

$$0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_r \leq q.$$

Les composantes du vecteur ρ peuvent être réordonnés comme suit

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(\nu_1)} \\ \vdots \\ \rho^{(\nu_r)} \end{pmatrix},$$

où $\rho^{(\nu_j)} = \begin{pmatrix} \rho_1^{(\nu_j)} \\ \vdots \\ \rho_{m_j}^{(\nu_j)} \end{pmatrix} \in R^{m_j}$ avec $\sum_{j=1}^r m_j = m$ et l'indice caractéristique de chaque $\rho_l^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}$ est égal à ν_j pour $j = 1, \dots, r$ et $l = 1, \dots, m_j$.

On supposera que les composantes de ρ sont déjà réordonnées comme ci-dessus.

Pour rendre compte la nouvelle partition de ρ , les matrices $\Psi^{(0)}$ et ψ sont partitionnées comme suit

- $\Psi^{(0)}(u) = \left[\Psi_1^{(0)}(u) \ \dots \ \Psi_r^{(0)}(u) \right] \in \mathbb{R}^{p \times m}$,
- $\Psi_j^{(0)}(u) \in \mathbb{R}^{p \times m_k} \ j = 1, \dots, r$,
- $\Psi(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
- $\Psi^{(k)}(u, x, \rho) = \left[\Psi_1^{(k)}(u) \ \dots \ \Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \right] \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$, $k = 1, \dots, q$,
- $\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) \in \mathbb{R}^{n_k \times m_j}$, $j = 1, \dots, r$.

- Type de paramétrisation: permettre aux linéarités de dépendre de certains paramètres inconnus à travers la structure suivante: pour $j = 1, \dots, r$,

$$\begin{cases} \frac{\partial F_k}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) = 0 \text{ si } k \leq \nu_j \text{ pour } k = 1, \dots, q-1, \\ \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) = 0 \text{ et } \frac{\partial g^{(k)}}{\partial \rho^{(\nu_j)}}(u, x, \rho) = 0 \text{ if } k \leq \nu_j \text{ pour } k = 1, \dots, q. \end{cases}$$

D'après la définition de l'indice caractéristique, nous avons $\Psi_{(j)}^{(k)}(u, x, \rho) = 0$ pour tout $k < \nu_j$. S'il existe $k_0 > \nu_j$ tel que $\Psi_j^{(k_0)}(u, x, \rho) \neq 0$, alors il suffit de transférer $\Psi_{(j)}^{(k_0)}(u, x, \rho)\rho^{(\nu_j)}$ à $g^{(k_0)}(u, x, \rho)$. Le nouveau $g^{(k_0)}(u, x, \rho)$ satisfait toujours la condition ci-dessus et le nouveau $\Psi_j^{(k_0)}(u, x, \rho)$ devient nul. De ce fait, on peut supposer sans nuire à la généralité que la matrice Ψ est telle que

$$\Psi_j^{(k)}(u, x, \rho) = 0 \text{ si } k \neq \nu_j \text{ for } k = 1, \dots, q.$$

Chaque colonne de la matrice Ψ comporte une et une seule entrée non nulle (exceptée la colonne 1 qui pourrait être identiquement nulle si $\Psi^{(0)}$ dépend de ρ)

- Classe considérée sous forme compacte:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(u, x, \rho) \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix} + \mathcal{G}(u, x, \rho) + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y = \mathcal{C}(u) \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} F(u, x, \rho) & \Psi(u, x, \rho) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} g(u, x, \rho) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}(u) = \begin{bmatrix} C(u) & \Psi^{(0)}(u) \end{bmatrix}.$$

Hypothèses

- A1.** L'état $x(t)$, l'entrée $u(t)$ et les paramètres inconnus ρ sont bornés, c-a-d, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$ et $\rho \in \Theta$ où $X \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^s$ et $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ sont des compacts.
- A2.** Les fonctions F, Ψ et g sont de classe \mathcal{C}^1 par rapport à x et ρ . Aussi, les fonctions F, Ψ, g, F_0 et $\Psi^{(0)}$ sont continues par morceaux en u . Enfin, l'entrée $u(t)$ est continue par morceaux.
- A3.** Les fonctions inconnues $\varepsilon^{(k)}$ pour $k = 1, \dots, q$ sont essentiellement bornées, c-a-d, $\exists \delta_1, \dots, \delta_q > 0 : \text{ess. sup}_{t \geq 0} \|\varepsilon^{(k)}(t)\| \leq \delta_k$.

• Notation:

$$x_M = \sup_{x \in X} \|x\|, \rho_M = \sup_{\rho \in \Theta} \|\rho\|, F_M = \sup_{(u, x, \rho) \in U \times X \times \Theta} (\|F(u, x, \rho)\|, \|F_0(u)\|),$$

$$\Psi_M = \sup_{(u, x, \rho) \in U \times X \times \Theta} (\|\Psi(u, x, \rho)\|, \|\Psi^{(0)}(u)\|).$$

Les constantes de Lipschitz de F, Ψ et g sont respectivement L_F, L_ψ et L_g .

Equations de l'observateur

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\rho}} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} + \mathcal{G}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \theta \Lambda_\theta^{-1}(\theta) \mathcal{P}(t) \mathcal{C}^T(u) (C(u)\hat{x} + \Psi^{(0)}(u)\hat{\rho} - y),$$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}^T(t)$ est $(n + m) \times (n + m)$ solution de l'EDO de Riccati

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = \theta (\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t) \mathcal{F}^T(u, \hat{x}, \hat{\rho}) + \mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t) \mathcal{C}^T(u) \mathcal{C}(u) \mathcal{P}(t)), \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}^T(0) \succ 0,$$

Λ_θ est une matrice diagonale $(n + m) \times (n + m)$, $\Lambda_\theta = \text{diag}(\Delta_\theta, \Omega_\theta)$ où Δ_θ et Ω_θ sont diagonales et de tailles respectives $n \times n$ et $m \times m$

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_{q-1}} \right), \quad \Omega_\theta = \text{diag} \left(\frac{1}{\theta^{\nu_1}} I_{m_1}, \frac{1}{\theta^{\nu_2}} I_{m_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{\nu_r}} I_{m_r} \right),$$

où $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse.

- Hypothèse additionnelle:

A4. L'EDO de Riccati admet une solution symétrique définie positive qui satisfait la propriété suivante

$$\exists \delta^* > 0; \exists \theta^* > 0; \forall \theta > \theta^*; \exists t^* \geq 0; \forall t \geq t^*, \frac{1}{\bar{\lambda}_M(\mathcal{P}(t))} \geq \frac{\delta^*}{\alpha(\theta)} I_{n+m},$$

où $\alpha(\theta)$ est une fonction telle que

$$\forall \theta > 0, \alpha(\theta) \geq 1 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0.$$

et $\bar{\lambda}_M(\mathcal{P}(t)) = \sup_{t \geq t_0} \lambda_M(\mathcal{P}(t))$, $\lambda_M(\mathcal{P}(t))$ la plus grande valeur propre de $\mathcal{P}(t)$

- Classe d'entrées pour laquelle l'hypothèse (A4) est satisfaite:
- $\exists \theta_0 > 0; \exists \delta_0 > 0; \exists T^* > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \forall t \geq \frac{T^*}{\theta}$, on a

$$\int_{t - \frac{T^*}{\theta}}^t \Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(s, t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Lambda_{\theta}^2,$$

$\Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(s, t)$ est la matrice de transition du système affine suivant

$$\dot{\xi}_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(t) = \mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) \xi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(t),$$

c-a-d,

$$\text{On a } \begin{cases} \frac{d}{dt} (\Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(t, s)) &= \mathcal{F}(u(t), \hat{x}(t), \hat{\rho}(t)) \Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(t, s), \\ \Phi_{u, \hat{x}, \hat{\rho}}(s, s) &= I_n. \end{cases}$$

Lemme: Sous cette condition d'excitation persistante, l'hypothèse (A4) est satisfaite.

• Preuve du lemme:

soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}^T$ la matrice régie par l'EDO de Lyapunov suivante

$$\dot{\mathcal{S}}(t) = -\theta \left(\mathcal{S}(t) + \mathcal{F}^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t)\mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u) \right), \quad \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^T(0) > 0.$$

On peut montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= e^{-\theta t} \Lambda_\theta^{-1} \Phi_{u, \hat{z}}^T(0, t) \Lambda_\theta \mathcal{S}(0) \Lambda_\theta \Phi_{u, \hat{z}}(0, t) \Lambda_\theta^{-1} \\ &\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Lambda_\theta^{-1} \Phi_{u, \hat{z}}^T(s, t) \Lambda_\theta \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Lambda_\theta \Phi_{u, \hat{z}}(s, t) \Lambda_\theta^{-1} ds. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{S}(0)$ est SDP et $\mathcal{C}(u(s))\Lambda_\theta = \mathcal{C}(u(s))$, on obtient pour $t \geq \frac{T^*}{\theta}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &\geq \theta \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t e^{-\theta(t-s)} \Lambda_\theta^{-1} \Phi_{u, \hat{z}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u, \hat{z}}(s, t) \Lambda_\theta^{-1} ds \\ &\geq \theta e^{-T^*} \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t \Lambda_\theta^{-1} \Phi_{u, \hat{z}}^T(s, t) \mathcal{C}^T(u(s)) \mathcal{C}(u(s)) \Phi_{u, \hat{z}}(s, t) \Lambda_\theta^{-1} ds \\ &\geq \frac{\delta_0 e^{-T^*}}{\alpha(\theta)} I_{n+m} \text{ dès que la propriété d'excitation persistante est satisfaite} \end{aligned}$$

La matrice \mathcal{S} est donc inversible.

$$\dot{\mathcal{S}}(t) = -\theta \left(\mathcal{S}(t) + \mathcal{F}^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t)\mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u) \right), \quad \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^T(0) > 0.$$

$$\dot{\mathcal{P}}(t) = \theta \left(\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)\mathcal{F}^T(u, \hat{x}, \hat{\rho}) + \mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho})\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t)\mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u)\mathcal{P}(t) \right), \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}^T(0) > 0,$$

On peut vérifier que $\mathcal{S}^{-1}(t) = \mathcal{P}(t)$ dès que $\mathcal{S}(0) = \mathcal{P}^{-1}(0)$. Il en résulte que $\underline{\lambda}_m(\mathcal{S}(t)) = \frac{1}{\bar{\lambda}_M(\mathcal{P}(t))}$ et l'hypothèse (A4) est satisfaite.

• **Théorème:** *Sous les hypothèses **A1** à **A3** et pour toute entrée satisfaisant **A4**, nous avons pour tout $\theta \geq \theta^*$, et pour tout $t \geq t^*$*

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \hat{x}(t) - x(t) \\ \hat{\rho}(t) - \rho \end{array} \right\| &\leq \beta \sqrt{\alpha(\theta)} \theta^{q^*} e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2}(t - t^*)} \left\| \begin{array}{l} \hat{x}(0) - x(0) \\ \hat{\rho}(0) - \rho \end{array} \right\| \\ &\quad + 2\beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2 \mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \theta^{2(q^* - k + 1)} \delta_k^2}, \end{aligned}$$

où $q^* = \max(q - 1, \nu_r)$, les δ_k 's les bornes essentielles des incertitudes, β une constante indépendante de θ ; θ^* , t^* et $\alpha(\theta)$ sont donnés dans **A4** et enfin $\mu(\theta) > 0$ est tel que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu(\theta) = 1$.

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \hat{x}(t) - x(t) \\ \hat{\rho}(t) - \rho \end{array} \right\| &\leq \beta \sqrt{\alpha(\theta) \theta^{q^*}} e^{-\frac{\theta \mu(\theta)}{2}(t - t^*)} \left\| \begin{array}{l} \hat{x}(0) - x(0) \\ \hat{\rho}(0) - \rho \end{array} \right\| \\ &\quad + 2\beta \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2 \mu^2(\theta)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \theta^{2(q^* - k + 1)} \delta_k^2}, \end{aligned}$$

• **Remarques:** compte tenu de l'expression de la borne de l'erreur, deux cas particuliers sont à mettre en avant:

$\mathcal{C}1$. En l'absence d'incertitude, c-a-d $\delta_k = 0$ pour $k = 1, \dots, q$, les erreurs d'observation et d'adaptation paramétrique convergent exponentiellement vers 0.

$\mathcal{C}2$. Lorsque seule δ_q est non nulle et $q^* = q - 1$ (c-a-d. $\nu_r \leq q - 1$, pas de paramètre inconnu qui apparaît pour la première fois dans la dernière équation (rang q)), alors ces erreurs ont une borne ultime qui peut être rendue aussi petite que désirée en considérant des valeurs élevées de θ puisque $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2 \mu(\theta)} = 0$.

• Grandes lignes de la preuve du théorème:

1. On démontre que $\bar{\lambda}_M(\mathcal{S}(t))$ est bornée supérieurement par une constante indépendante de θ . Pour ce faire, on considère la partition de \mathcal{S} sous la forme

$$\mathcal{S}(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & S_2(t) \\ S_2^T(t) & S_3(t) \end{pmatrix}, S_1 = S_1^T \ n \times n, \ S_3 = S_3^T \ m \times m, \ S_2 \ n \times m$$

$$\dot{S}_1(t) = -\theta \left(S_1(t) + F^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})S_1(t) + S_1(t)F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - C^T(u)C(u) \right),$$

$$\dot{S}_2(t) = -\theta \left(S_2(t) + F^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})S_2(t) + S_1(t)\Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - C^T(u)\Psi^{(0)}(u) \right),$$

$$\dot{S}_3(t) = -\theta \left(S_3(t) + \Psi^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})U(t) + U^T(t)\Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \Psi^{(0)T}(u)\Psi^{(0)}(u) \right).$$

On montre que chacune de ces matrices est bornée par une constante indépendante de θ (par récurrence en exprimant la solution des EDO et en exploitant la structure des différentes matrices).

2. Fonction de Lyapunov $V(\bar{\xi}, t) = \bar{\xi}^T \mathcal{S}(t) \bar{\xi}$, avec $\bar{\xi} = \Lambda_\theta \tilde{\xi}$ où $\tilde{\xi} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{x} - x \\ \hat{\rho} - \rho \end{pmatrix}$.

Forme adaptative de l'observateur

La matrice $\mathcal{S} = \mathcal{P}^{-1}$ peut se décomposer comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_n & S_1^{-1}S_2 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_3 - S_2^T S_1^{-1}S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & S_1^{-1}S_2 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $X \triangleq S_3 - S_2^T S_1^{-1}S_2$ est le complément de Schur de S_1 dans \mathcal{S} et $\Upsilon \triangleq -S_1^{-1}S_2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n & -\Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-T} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} I_n & \Upsilon \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Upsilon^T & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T & \Upsilon P \\ P \Upsilon^T & P \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{S}}(t) = -\theta \left(\mathcal{S}(t) + \mathcal{F}^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t)\mathcal{F}(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \mathcal{C}^T(u)\mathcal{C}(u) \right), \quad \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^T(0) > 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{S}_1 &= -\theta \{ S_1 + F^T(u, \hat{x}, \hat{\rho})S_1 + S_1F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - C^T(u)C(u) \}, \\ \dot{\Upsilon} &= \theta \{ (F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - S_1^{-1}C^T(u)C(u)) \Upsilon + \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - S_1^{-1}C^T(u)\Psi^{(0)}(u) \}, \\ \dot{P} &= \theta \{ P - PM^T M P \}, \text{ avec } M = C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u), \end{cases}$$

• Expression du terme correctif à l'aide de S_1 , P et Υ :

$$\begin{aligned} -\theta \Lambda_\theta^{-1} \mathcal{S} \mathcal{C}^T(u) &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_\theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T & \Upsilon P \\ P \Upsilon^T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^T(u) \\ \Psi^{oT}(u) \end{pmatrix} \\ &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_\theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1}C^T(u) + \Upsilon P (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T \\ P (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T \end{pmatrix} \\ &= -\theta \begin{pmatrix} \Delta_\theta^{-1} (S_1^{-1}C^T(u) + \Upsilon P M^T) \\ \Omega_\theta^{-1} P M^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Equations de l'observateur sous forme adaptative

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = F(u, \hat{x}, \hat{\rho})\hat{x} + g(u, \hat{x}, \hat{\rho}) + \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho})\hat{\rho} \\ \quad - \theta \Delta_{\theta}^{-1} \left(\mathcal{P}_1 C^T(u) + \Upsilon P (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T \right) (C(u)\hat{x} + \Psi^{(0)}(u)\hat{\rho} - y), \\ \dot{\hat{\rho}} = -\theta \Omega_{\theta}^{-1} P (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T (C(u)\hat{x} + \Psi^{(0)}(u)\hat{\rho} - y), \\ \dot{\mathcal{P}}_1 = \theta \left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_1 F^T(u, \hat{x}, \hat{\rho}) + F(u, \hat{x}, \hat{\rho})\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1 C^T(u)C(u)\mathcal{P}_1 \right), \\ \dot{\Upsilon} = \theta \left((F(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \mathcal{P}_1 C^T(u)C(u)) \Upsilon + \Psi(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - \mathcal{P}_1 C^T(u)\Psi^{(0)}(u) \right), \\ \dot{P} = \theta \left(P - P (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u))^T (C(u)\Upsilon + \Psi^{(0)}(u)) P \right). \end{array} \right.$$

avec

$$\Delta_{\theta} = \text{diag} \left(I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_{q-1}} \right), \quad \Omega_{\theta} = \text{diag} \left(\frac{1}{\theta^{\nu_1}} I_{m_1}, \frac{1}{\theta^{\nu_2}} I_{m_2}, \dots, \frac{1}{\theta^{\nu_r}} I_{m_r} \right),$$

($\mathcal{P}_1 = \mathcal{S}_1^{-1}$, introduite pour éviter l'inversion de matrices).

Application au moteur asynchrone

- Modèle du moteur

$$\begin{cases} \dot{i} &= NH(\omega)\psi - \gamma i + \frac{1}{\sigma L_s} u, \\ \dot{\psi} &= -H(\omega)\psi + \frac{M}{T_r} i, \\ \dot{\omega} &= \frac{pM}{JL_r} i^T J_2 \psi - \frac{1}{J} T_L, \end{cases}$$

$i = (i_1, i_2)^T$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ et $u = (u_1, u_2)^T$ sont respectivement les courants statoriques, les flux rotoriques et les tensions; ω et T_L sont respectivement la vitesse du moteur et le couple de charge; J le moment d'inertie, p est le nombre de paires de pôles. Les autres variables sont définies comme suit

$$H(\omega) = \frac{1}{T_r} I_2 - p\omega J_2 \quad \text{avec} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad N = \frac{M}{\sigma L_s L_r}, \quad \gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2},$$

- Changement de variables: $x^{(1)} = i$, $x^{(2)} = NH(\omega)\psi$, $x^{(3)} = \omega$ and $x^{(4)} = T_L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} - \gamma x^{(1)} + \frac{1}{\sigma L_s} u, \\ \dot{x}^{(2)} = pJ_2 \left(x^{(2)} - \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) x^{(3)} - \frac{1}{T_r} \left(x^{(2)} - \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) + \varepsilon^{(2)}(t), \\ \dot{x}^{(3)} = -\frac{1}{J} x^{(4)} + \frac{p}{J} \frac{M}{NL_r} \frac{1}{\left(\frac{1}{T_r}\right)^2 + (p x^{(3)})^2} x^{(1)T} J_2 \left(\frac{1}{T_r} I_2 + p x^{(3)} J_2 \right) x^{(2)}, \\ \dot{x}^{(4)} = \varepsilon^{(4)}(t), \\ y(t) = x^{(1)}(t). \end{array} \right.$$

$$\varepsilon^{(2)}(t) = -pN J_2 \psi(t) \dot{\omega}(t) \in \mathbb{R}^2.$$

$\varepsilon^{(4)} \in \mathbb{R}$ est la dynamique du couple de charge.

- Estimation de 2 paramètres: $\rho = \rho^{(1)} \in \mathbb{R}^2$ avec $\rho_1^{(1)} = \gamma$ et $\rho_2^{(1)} = 1/(\sigma L_s)$

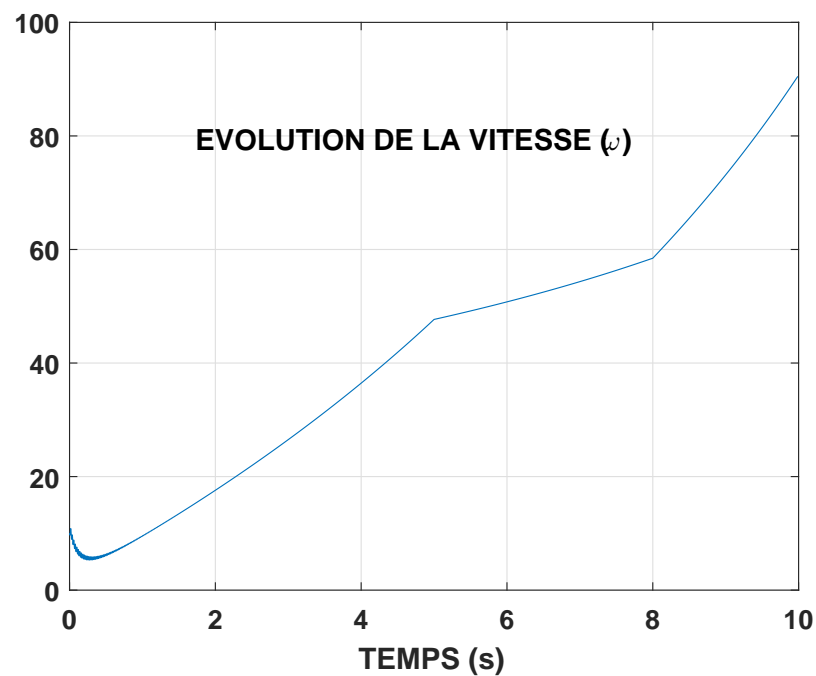
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} - \gamma x^{(1)} + \frac{1}{\sigma L_s} u \stackrel{\Delta}{=} x^{(2)} - \rho_1^{(1)} x^{(1)} + \rho_2^{(1)} x^{(1)} u \\
 \dot{x}^{(2)} = pJ_2 \left(x^{(2)} - \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) x^{(3)} + \frac{1}{T_r} \left(-x^{(2)} + \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) + \varepsilon^{(2)}(t), \\
 \stackrel{\Delta}{=} pJ_2 \left(x^{(2)} - (\rho_1^{(1)} - R_s \rho_2^{(1)}) x^{(1)} \right) x^{(3)} \\
 \quad + iT_r \left(-x^{(2)} + (\rho_1^{(1)} - R_s \rho_2^{(1)}) x^{(1)} \right) + \varepsilon^{(2)}(t) \\
 \dot{x}^{(3)} = -\frac{1}{J} x^{(4)} + \frac{p}{J} \frac{M}{NL_r} \frac{1}{\left(\frac{1}{T_r}\right)^2 + (p x^{(3)})^2} x^{(1)T} J_2 \left(\frac{1}{T_r} I_2 + p x^{(3)} J_2 \right) x^{(2)}, \\
 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{J} x^{(4)} + DD \frac{p}{J \rho_2^{(1)}} x^{(1)T} J_2 \left(iT_r I_2 + p x^{(3)} J_2 \right) x^{(2)}, \\
 \dot{x}^{(4)} = \varepsilon^{(4)}(t), \\
 DD = \frac{1}{iT_r^2 + (p x^{(3)})^2} \text{ et } iT_r = \frac{\rho_1^{(1)} - R_s \rho_2^{(1)}}{L_s \rho_2^{(1)} - 1}
 \end{array} \right.$$

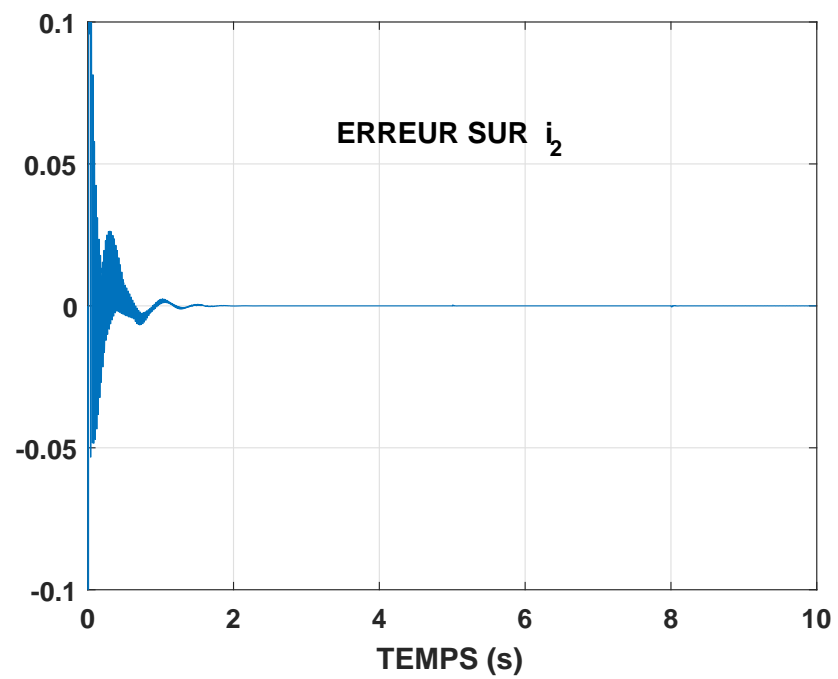
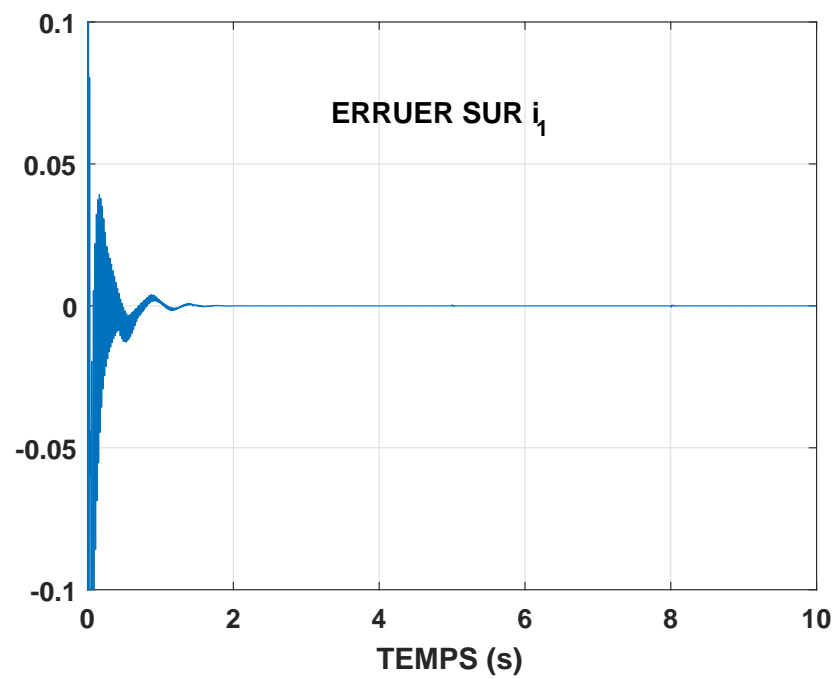
Résultats

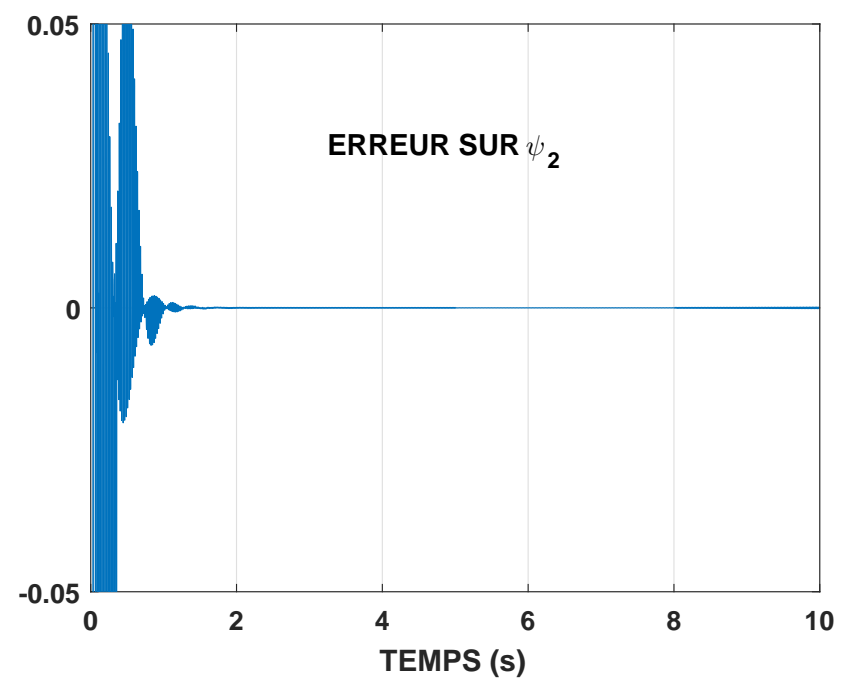
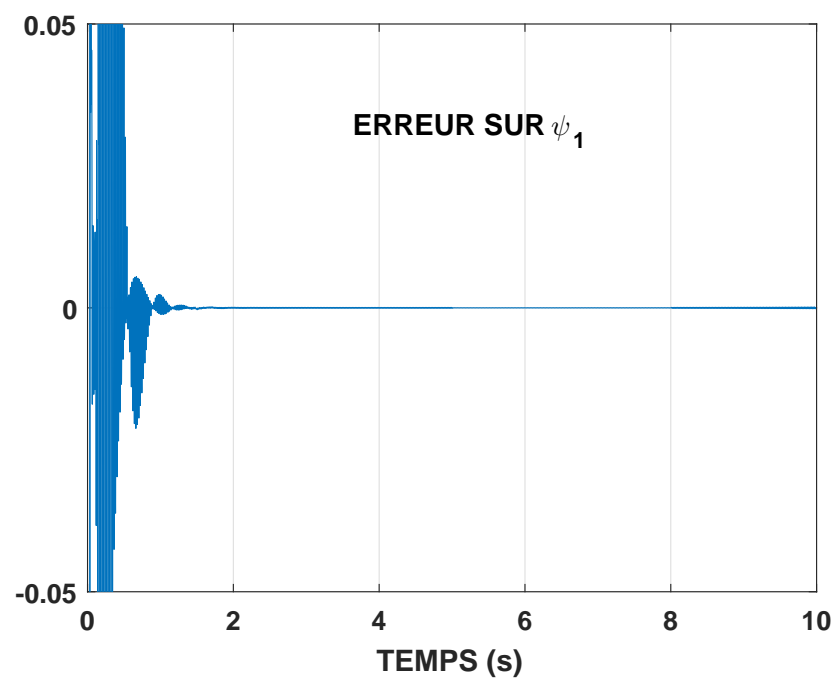
- Conditions opératoires: $T_L = 2$ si $t \in [0\ 5] \cup [8\ 10]$ et $T_L = 4$ si $t \in]5\ 8[$.

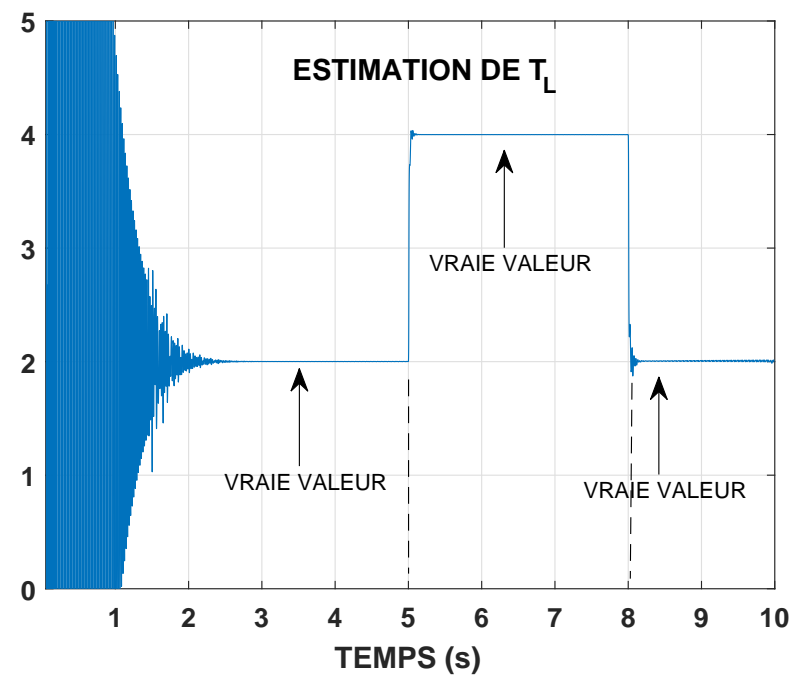
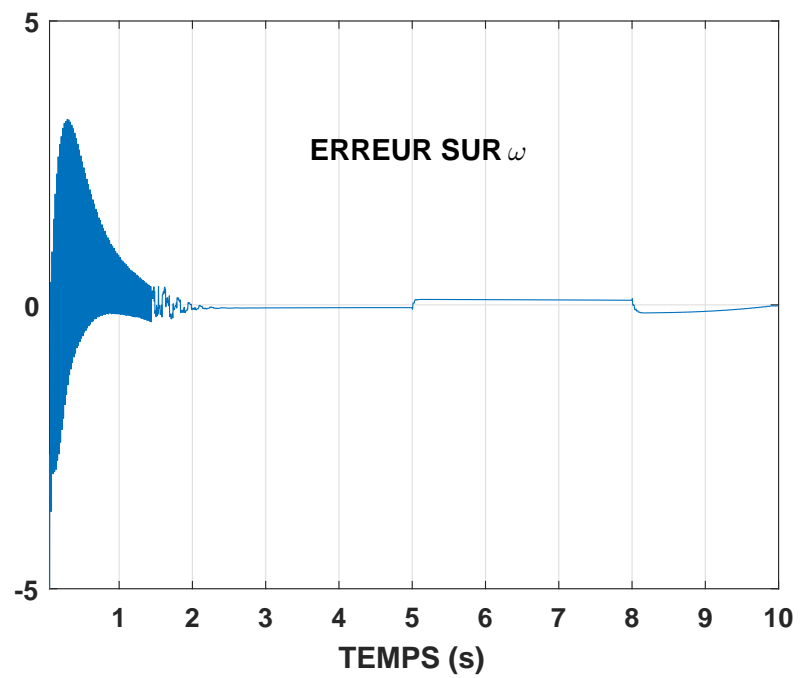
$$u_1 = 80 \cos(2\pi 50t), \quad u_2 = 80 \sin(2\pi 50t); \quad p = 2; \quad L_s = 0.097H; \quad M = 0.091H;$$

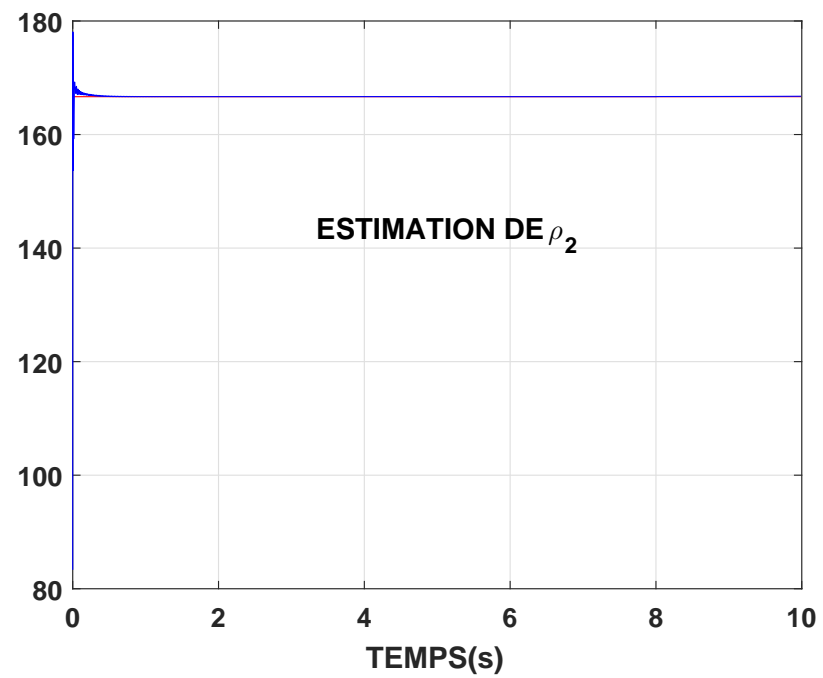
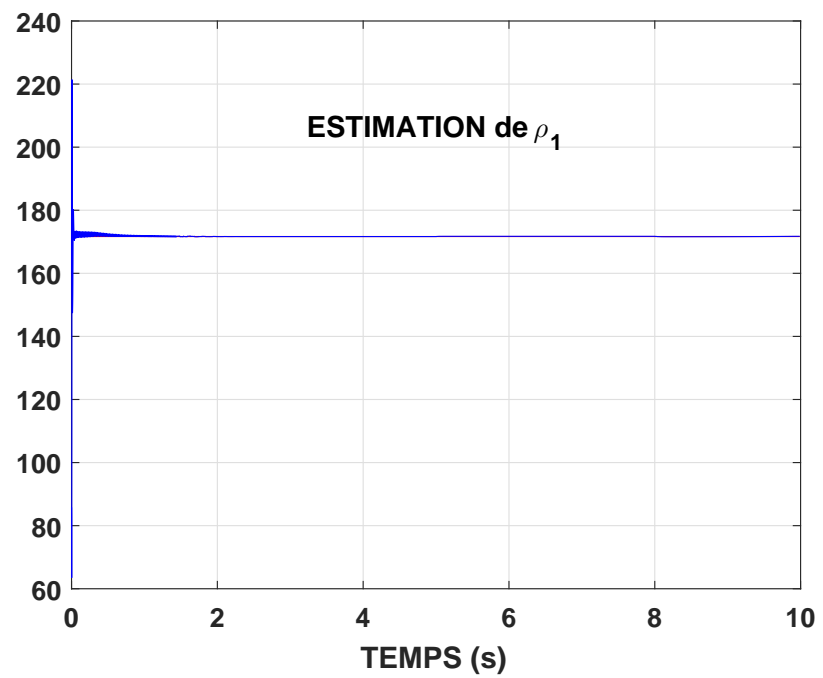
$$J = 0.22Kg.m^2; \quad Lr = 0.091H; \quad R_s = 0.63\Omega; \quad R_r = 0.4\Omega;$$

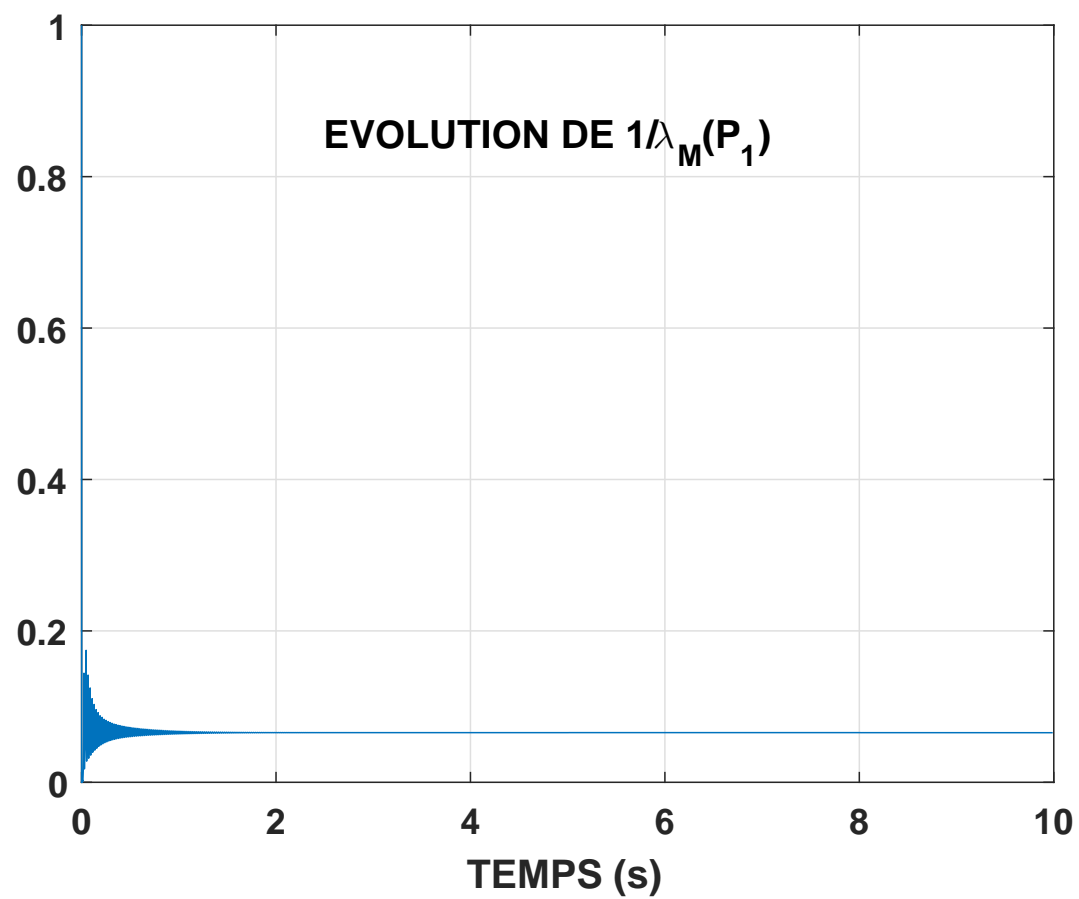


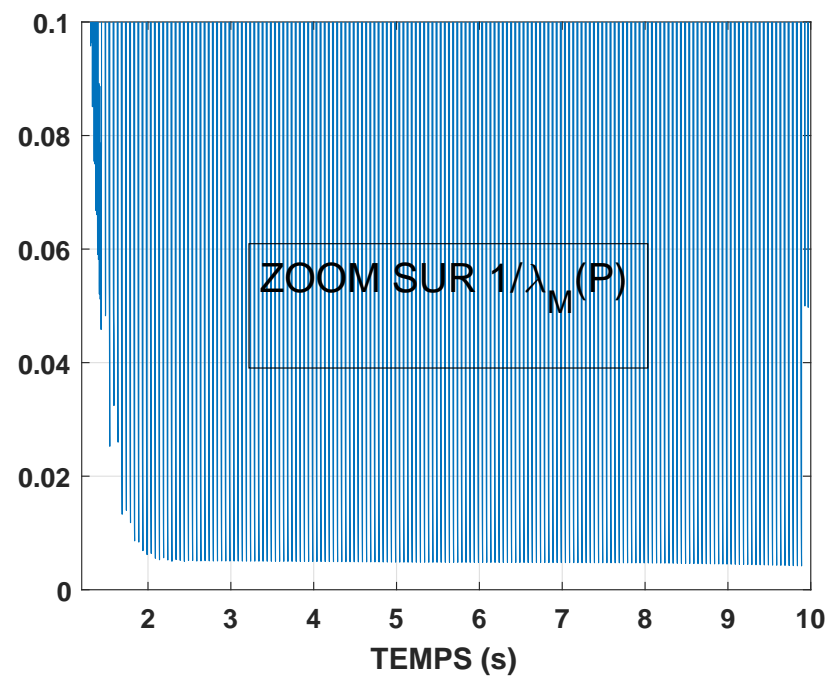
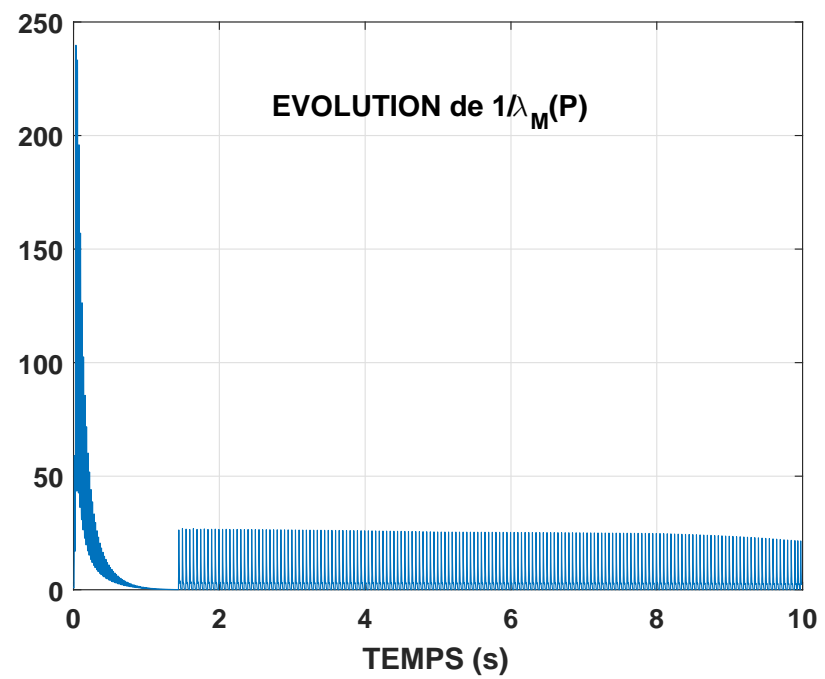












- Estimation de 3 paramètres: $\rho = \rho^{(1)} \in \mathbb{R}^2$ avec $\rho_1^{(1)} = \gamma$, $\rho_2^{(1)} = 1/(\sigma L_s)$ et $\rho^{(2)} = \rho_1^{(2)} = 1/T_r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} - \gamma x^{(1)} + \frac{1}{\sigma L_s} u \stackrel{\Delta}{=} x^{(2)} - \rho_1^{(1)} x^{(1)} + \rho_2^{(1)} x^{(1)} u \\ \dot{x}^{(2)} = p J_2 \left(x^{(2)} - \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) x^{(3)} + \frac{1}{T_r} \left(-x^{(2)} + \frac{NM}{T_r} x^{(1)} \right) + \varepsilon^{(2)}(t), \\ \stackrel{\Delta}{=} p J_2 \left(x^{(2)} - (\rho_1^{(1)} - R_s \rho_2^{(1)}) x^{(1)} \right) x^{(3)} \\ \quad + \left(-x^{(2)} + (\rho_1^{(1)} - R_s \rho_2^{(1)}) x^{(1)} \right) \rho_1^{(2)} + \varepsilon^{(2)}(t) \\ \dot{x}^{(3)} = -\frac{1}{J} x^{(4)} + \frac{p}{J} \frac{M}{NL_r} \frac{1}{\left(\frac{1}{T_r}\right)^2 + (p x^{(3)})^2} x^{(1)T} J_2 \left(\frac{1}{T_r} I_2 + p x^{(3)} J_2 \right) x^{(2)}, \\ \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{J} x^{(4)} + \frac{p}{J \rho_1^{(2)}} x^{(1)} J_2 \frac{1}{\left(\rho_1^{(2)}\right)^2 + (p x^{(3)})^2} \left(\rho_1^{(2)} I_2 + p x^{(3)} J_2 \right) x^{(2)}, \\ \dot{x}^{(4)} = \varepsilon^{(4)}(t). \end{array} \right.$$